

EL QUEHACER MATEMÁTICO. UN RECORRIDO POR LA HISTORIA

PARTE IV: LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XIX

por Juan Manuel PÉREZ DELGADO

(Juan Manuel PÉREZ DELGADO es Licenciado en Ciencias Exactas y profesor de Matemáticas en el Instituto de Educación Secundaria "Alarifes Ruiz Florindo", de Fuentes de Andalucía, Sevilla-Spain)

Estas notas sobre el devenir histórico de las Matemáticas son un resumen puntual extraído de la obra "HISTORIA GENERAL DE LAS CIENCIAS", de René Tanton y otros (1988). Edit Orbis, Barcelona.

Están estructuradas en cinco partes:

PARTE I: LA MATEMÁTICA EN LA ANTIGÜEDAD, EDAD MEDIA Y RENACIMIENTO.

PARTE II: LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XVII

PARTE III: LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XVIII.

PARTE IV: LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XIX.

PARTE V: LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XX.

PARTE IV: EL SIGLO XIX

EL SIGLO XIX

El increíble desarrollo de las diferentes ramas de las Matemáticas en el siglo XIX es consecuencia del aumento del número de investigadores, así como del número de publicaciones, sobre todo, en tres países, Inglaterra, Francia y Alemania. Algo más lejos, Italia, Rusia, Suiza y los Países Nórdicos. Y una nueva nación se va a apuntar al carro: los Estados Unidos de América.

LA RENOVACION DEL ALGEBRA

El teorema fundamental. **C. F. Gauss** (1777-1855), en su tesis da la primera demostración rigurosa del "Teorema Fundamental del Algebra", que había sido enunciado en 1629 por **Girard**, y demostrado imperfectamente por **D'Alembert** y **Euler**. **Gauss** prestó atención a este teorema varias veces y publicó varias demostraciones del mismo, inspiradas en diferentes principios.

Las ecuaciones de grado superior al 4º. Aún a principios del siglo, el problema central del Algebra seguía siendo la caza y captura de las fórmulas para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro. Continúa aquí la historia de la "culebra", a la cual se dedicaron notables trabajos como los de **Lagrange** y los de **Vandermonde**, enfocándolos adecuadamente hacia la teoría de grupos y de cuerpos. Siguió la famosa respuesta dada por **Gauss** a la ecuación $x^n - 1 = 0$, con n primo impar, con la aparición de los grupos cíclicos. Y en esa dirección continua el italiano **Paolo Ruffini** (1765-1822) intentando demostrar la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado, y aunque no lo consiguió, **Cauchy** supo apreciar el indiscutible valor del trabajo realizado por **Ruffini**. Pero es un joven noruego, **Niels Henrik Abel** (1802-1829), el que, después de haber creído encontrar una fórmula de resolución por radicales de la ecuación de quinto grado, se da cuenta de su error, y demuestra en el año 1825 la imposibilidad de esa solución por radicales por un método más poderoso que el usado por **Ruffini**. Llamado por **Riemann**, en Dinamarca cogió una pulmonía y murió a los 26 años. Antes le dio tiempo de estudiar ciertas ecuaciones "abelianas", que son resolubles por radicales. Por la misma época otro joven matemático, **Evariste Galois** (1811-1832), trabajaba en los mismos temas, y una noche antes de su muerte, redactó una carta a un amigo, donde incluía una de sus memorias: "Harás el favor de pedir públicamente a **Jacobi** o a **Gauss** que digan su opinión no sobre la verdad, sino sobre la importancia de estos teoremas.... luego habrá, según espero, gente que considerará provechoso descifrar este galimatías. Un afectuoso abrazo.". Por cierto **Galois** murió en un duelo, con el Rector de la Universidad de Paris, por un asunto de frente pero a pesar del peso de los cuernos del señor Rector, hay que admitir que era un excelente tirador. En fin, la culebra: $a_5 x^5 + \dots + a_0 = 0$, recogió una nueva presa, ahora con 21 años .

En la memoria, (Sobre las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones por radicales, que fue presentada un año antes a la Academia de las Ciencias de Paris, obteniendo un informe desfavorable por parte de **Poisson**), también incluyó unas nuevas ideas, como los ahora llamados imaginarios de **Galois**, y ciertos caminos nuevos en el tema de la integración de las funciones algebraicas, muy en la línea que después seguiría **Riemann**. Esta memoria saldría a la luz, catorce años después de su muerte, cuando **Liouville** las publicó. Se ven las semillas de las nociones de cuerpo, de grupo, y, sobre todo, de los grupos de sustituciones. Mas, permaneció en el rincón del olvido. Sin embargo la teoría de grupos, iba día a día, dando nuevos frutos, **Cauchy** acababa de reanudar el estudio de los grupos abstractos de orden finito, **Betti**, **Cayley**, **Serret**, **Sylow**, **Kronecker**, difundían las ideas de **Galois**, y, por último, el trabajo de **Camille Jordan**, con "Tratado de las sustituciones", dándole a la teoría de grupos su verdadero valor y fuerza, de las cuales se

aprovecharon **Felix Klein y Sophus Lie** para la Geometría, y **Kronecker, Weber, Frobenius**, para el Álgebra, así como **Dedekind** para el Análisis.

Métodos de resolución aproximada de ecuaciones. La resolución efectiva de las ecuaciones numéricas fue objeto de profundos estudios y trabajos, bien en la línea de perfeccionamiento del método de **Newton -Raphson**, como **Mourraille, Fourier, Dandelin-**, bien como hicieron **Ruffini y W. G. Horner**, que desarrollaron un método que ya usaban en China en el siglo XII, y tuvieron bastante éxito. **Waring y Dandelin**, establecieron otro nuevo sistema, que posteriormente fue mejorado por **C. H. Gräffe**, y es un método que permite calcular simultáneamente todas las raíces reales y complejas de una ecuación mediante el uso de series recurrentes, ya en sintonía con las ideas de **Jacobi** y de **E. McClintock**. Por otros medios, usando la técnica logarítmica siguieron los pasos **Gauss, Bellavitis, y Mehmke**.

El tema de la localización de las raíces reales de una ecuación numérica, introducida por Descartes (1637), fue perfeccionada por **Fourier**, entre 1796 y 1820, y luego por **Sturm**, el cual con su famoso teorema, precisó el número exacto de las raíces reales comprendidas entre dos límites dados. El caso de las raíces complejas, **Cauchy**, formuló en 1831 un teorema, que se hizo clásico, sobre el número de raíces reales o complejas comprendidas en el interior de un contorno cerrado.

Teoría de los determinantes. En el siglo anterior se esbozó el algoritmo de los determinantes, pero es en el XIX cuando se desarrolló claramente. Entre los impulsores destacamos en primer lugar a **H. Wronski**, introdujo varios muy particulares, los cuales fueron estudiado por **Liouville**, uno de ellos lleva el nombre de wronskiano. **Cauchy** (que fue el que le bautizó con el nombre de determinante), **J. P. Binet y Jacobi**, precisaron los principios de la teoría general de los determinantes y contribuyeron a la difusión del algoritmo. **Hesse** aplicaba los determinantes a la teoría de la eliminación algebraica y al estudio de las curvas de tercer orden. **Cayley**, que introdujo la notación actual y **Sylvester**, desarrollaban su teoría y ampliaban el campo de sus aplicaciones.

Matrices. Las matrices, extensión del concepto de determinante, aparecen en el estudio de la composición de las transformaciones homográficas realizados por **Arthur Cayley** desde 1843. También **Hamilton y Grassmann** en sus estudios respectivos (cuaternios y equipolencias) las usaron, pero fue **Cayley**, en 1858, quien da la verdadera definición y sus principales propiedades. Y su desarrollo posterior en la escuela inglesa, con **Clifford y Sylvester**, y en EEUU, **Benjamin Peirce**, que lo usa en su teoría de las álgebras lineales asociativas.

El estudio de las formas y la teoría de invariantes. El estudio de las formas (funciones homogéneas de varias variables independientes) tuvo un notable desarrollo al principio del siglo, sobre todo en relación con el florecimiento de la Geometría analítica, con el uso de las coordenadas homogéneas, en las cuales una curva plana o de una superficie, se reduce a la anulación de una forma de dos o más variables independientes y por tanto equivale el cambio de coordenadas a simples sustituciones. Las propiedades que se conservan invariantes conducen a la reducción de las mismas a sus formas más simples (canónicas). La noción de invariancia se tiene de forma implícita en los trabajos de **Lagrange, Gauss, Jacobi, Eisenstein**, pero no fue explicitado hasta que **Boole**, la definió. De éste hecho se aprovechó la escuela inglesa donde **Cayley y Sylvester** rivalizaron en resultados, vocabulario y principios de la nueva teoría. **Hesse**, que también siguió el estudio de las curvas de tercer orden en coordenadas homogéneas, y con esa ocasión introdujo el determinante que lleva su nombre y que tiene gran importancia, léase determinación de extremos de funciones de varias variables.

En 1858, **Aronhold**, mostró los estrechos lazos que unen los trabajos de **Hesse** con la teoría de invariantes y en 1863 ofreció una exposición sintética con ayuda de su propia notación, que se fue difundiendo por todos lados, y de la cual se aprovecharon **Kronecker**, **Christoffel**, **Klein**, **Study**, **Fuchs** en Alemania, **Jordan** y **Hermite** en Francia, etc.

Cuaterniones y números hipercomplejos. En el año 1835, **W. R. Hamilton** (1805-65) orientó sus estudios hacia el Algebra, publicando una teoría rigurosa de los números complejos, definidos como pares de números reales, y en el intento de ampliar la idea llegó a la teoría de cuaterniones, fundados en la representación plana del cálculo sobre números complejos al espacio, daban por primera vez en la historia un ejemplo de Algebra no conmutativa. **W. K. Clifford**, introdujo en 1872 otro tipo de números hipercomplejos, los bicuaterniones, cuyas reglas de cálculo precisó y dio aplicación de los mismos a ciertas Geometrías no euclideas.

Las álgebras

Como consecuencia de cada extensión de la noción de número, correspondía una ampliación de la noción de Algebra, i.e, del estudio abstracto de las leyes de composición que rigen a esos nuevos elementos.

La refundición de todas éstas nuevas ideas y elementos, fue esbozada por el matemático americano **B. Peirce**, que en 1864 emprendió sus primeras investigaciones generales sobre la estructura de las álgebras de dimensión finita, y fueron continuados por algebristas, **Cayley**, **Sylvester**, **Laguerre**, **C. Peirce**, **Dedekind**, **Lie**, **Study**, **Scheffers**, **Schur**, **Molien**, **Cartan** ... cuyos trabajos fueron continuados en el siglo XX. Así, con una evolución tan extraordinariamente rápida, el objetivo principal del Algebra pasaba de la teoría de ecuaciones a la de las estructuras algebraicas.

Los comienzos del cálculo vectorial

La noción de vector estaba implícitamente definida en la ideas de Fuerza y Velocidad. Pero las operaciones vectoriales de modo explícito, se realizó por vez primera, a propósito de la representación de los números complejos, en los trabajos de **Bellavitis**, que le condujo a su teoría de las equipolencias, que es la primera representación de conjunto de un cálculo de las magnitudes dirigidas y orientadas. **Möebius**, con su Cálculo baricéntrico, y sobre todo **Grassmann**, con su Teoría lineal de la extensión, fueron los que se enfrentaron de hecho con el problema, pero su vocabulario, notaciones, etc, las ideas no fueron comprendidas, hasta que **Hankel** y **Schlegel**, dieran una versión mucho más clara de su obra.

Aunque la exposición por **Grassmann** incluía las nociones básicas del cálculo vectorial, producto interno y externo, etc, y ampliaciones a dimensión n , eso si despertó un vivo interés posteriormente. Por cierto, que los términos "escalar y vector", se lo debemos al amigo **Hamilton**. Y el desarrollo del análisis vectorial se difundió rápidamente en Mecánica, con definición de "gradiente" por **Lamé**, y los posteriores estudios de los llamados Físicos -matemáticos como **Stokes**, **Maxwell**, **Heaviside**, **Giggs**, **Lorentz**, con las nuevas nociones de flujo, divergencia, rotacional, etc, aunque sufrieron los ataques de los representantes de la Escuela de los cuaterniones, **Tait**, **Macfarlane**, el cálculo vectorial se difundió rápidamente en el siglo XX.

Los comienzos del cálculo tensorial. Fue la teoría de la elasticidad, como indica el mismo término tensor, fue introducido por **Voigt**, en 1898 y recogido por **Gibbs** ya en el siglo XX, para designar el sistema de seis números que caracteriza las tensiones en el interior de un sólido deformado. Las reglas fundamentales se han ido desprendiendo gota a gota de los estudios de la Estática de los medios continuos, trabajos comenzados por físicos matemáticos del XIX, **Green**, **Navier**, **Kirchhoff**, **Neumann**, **Beltrami**, **Thomson**, y los citados, **Gibbs** y **Voigt**. La teoría de los

invariantes aportó los elementos algorítmicos indispensables para la creación del cálculo tensorial, uno de cuyos objetos es estudiar las transformaciones sufridas por las componentes de los tensores con los cambios de sistemas de coordenadas, y deducir de ellas invariantes. El estudio de las formas multilineares con varias serie de variables "cogradyentes" o "contragadyentes" equivalen al de los tensores.

Hoy se denominan covariantes y contravariantes.

La influencia de Riemann ha contribuido a la creación del análisis tensorial, la noción de curvatura del espacio en un punto en la dirección de un elemento plano dado, es lo llamado tensor de curvatura. Este hecho fue expuesto por **G. Ricci**, (1884) a propósito de la fundación del cálculo diferencial absoluto, basado en la continuación de los trabajos de **Christoffel**. Un alumno de **Ricci**, **T. Levi Civita**, mostró la potencia de esta aplicación del cálculo tensorial a la Geometría Diferencial; su interés se reveló aún más importante cuando **Einstein**, encontró en él el instrumento matemático más adecuado a sus trabajos.

Primeros trabajos de Lógica Matemática. Una de las aportaciones más importantes del siglo XIX consiste en haber emprendido el esfuerzo de sistematización de la Lógica, etapa imprescindible hacia la axiomatización y formalización de la Matemática y hacia la creación de la Lógica Simbólica y la Metamatemática.

Aunque ya estaba en el espíritu de **Leibniz**, este proyecto de "característica universal", que sentaba los primeros pasos de la axiomática y la lógica simbólica moderna, tuvo poco éxito, por no decir nada.

A principio de siglo, **Bolzano**, **Cauchy**, **Abel** y **Dirichlet**, emprendieron un amplio esfuerzo de rigorización que desembocará a la aritmetización de la Matemática por **Kronecker** y a la teoría de conjuntos de **Cantor**. Pero el verdadero esfuerzo en coordinar la Lógica y la Matemática fue llevado a término por algebraistas ingleses, fundamentalmente por **De Morgan** y **Boole**, aunque cabe citar a **Peacock**, **Babbage** y **Herschel**.

De la obra de **Augustus De Morgan**, matemático de pensamiento tan original, con su libro "*Lógica formal*", y de **Boole**, con el suyo: "Las leyes del pensamiento", que hacen de él, el verdadero creador de la lógica simbólica, que después continuaron, **C. S. Peirce**, **Schröder**, **Hankel** y **Peacock**, y sobre todo **F. L. Frege**, con sus variables proporcionales y su escritura conceptual, que tanto influyeron en sus seguidores **B. Russell** y **A. N. Whitehead**. Otro gran seguidor fue sin duda, **Giuseppe Peano**, que tanto contribuyó a la logificación de la Matemática, así como sus discípulos: **Burali-Forti**, **Pieri**, **Vacca**, **Vivanti**, **Padoa**, **Fano**, etc .

LAS GEOMETRIAS

Renovación de la Geometría pura. El desarrollo de la Geometría pura o sintética fue especialmente brillante en la primera mitad del siglo XIX. Comienza con el redescubrimiento de la Geometría proyectiva, cuyos principios estaban asentados por **Desargues**, y que estaban prácticamente olvidados, **Monge** se encargó de refrescarlos y darles nuevas líneas de aplicación. **Brianchon** demostró por polaridad la proposición correlativa del teorema del hexagrama de **Pasca**, y otros teoremas relativos a las cónicas, así como **Dupin** y **Gergonne**.

Pero fue **Jean Víctor Poncelet** (1788-1867), cuando estaba prisionero en Rusia, en los años 1813-14, quien preparó allí las bases de una profunda reforma de la Geometría en su obra "Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras". La aparición de este tratado pone fecha a la verdadera creación de la Geometría Proyectiva, estudio de las propiedades geométricas que se conservan mediante proyección central o perspectiva.

La transformación mediante polares recíprocas, o polaridad, introducida también por **Poncelet**, se generalizó con el nombre de correlación. La simetría entre punto y recta (o plano o hiperplano) que aparece en esa transformación cobró forma más general en el principio de dualidad, que duplicó la Geometría. A esta idea se dedicaron **Poncelet**, **Chasles**, **Möbius** y **Plücker**.

Steiner, Chasles y la doctrina proyectiva. **Jakob Steiner** (1796-1863), geómetra suizo, basándose en las ideas de **Poncelet** (métodos de las proyecciones, los elementos del infinito...) llegó a definir correctamente el espacio proyectivo, el espacio de la Geometría elemental completado con los elementos en el infinito, seis formas fundamentales clasificadas en tres especies, probando que se puede pasar de una a otra de la misma especie siempre y cuando se cumpla una condición: de proyectividad que **Staudt** (1847) formulará en forma más general.

A partir de esas formas, **Steiner** sistematiza los métodos de la generación de las figuras. Define las cónicas, por ejemplo, como la intersección de los radios homólogos de dos haces homográficos, o bien en su forma tangencial. **Michel Chasles** (1793-1880), con obras paralelas a la de **Steiner**, contribuyó al florecimiento y la difusión de la Geometría proyectiva, con innumerables memorias y trabajos puramente geométricos bastante difíciles, como la atracción de elipsoides, cuádricas homofocales, geodésicas del elipsoide, superficies normadas de tercer orden, etc, así como su celebre método de correspondencias. También hay que citar a otros autores como **Seydewitz**, **Cremona**, **Schröter**.

Staudt y la axiomatización de la Geometría proyectiva. La Geometría proyectiva se enfrentaba a dificultades que la Geometría analítica estaba superando, el uso de las nociones métricas en la definición de elementos proyectivos, la insuficiente justificación del uso de elementos imaginarios, el disimulado recurso al método de las coordenadas, y la pesadez de muchas demostraciones. Y en estos términos se encaminó **Staudt** a la reconstrucción de toda la Geometría proyectiva con independencia de toda noción métrica (ángulos, distancias, etc) y sin más ayuda que la de axiomas referentes a la posición o el orden de los elementos fundamentales. **Staudt** se limita al campo real; después de haberse enfrentado con el problema de la proyectividad, define la razón armónica, las proyectividades y las cónicas, seguidamente define los elementos imaginarios como elementos dobles de involuciones elípticas, introduce las nociones de orden y sentido, y al establecer el principio y las reglas del cálculo de coordenadas, identifica el dominio de la Geometría proyectiva con el de la analítica.

Klein, aporta unos elementos que faltaban, como la necesidad de añadir el axioma de continuidad, demuestra la independencia de la Geometría proyectiva respecto del postulado de las paralelas, la indemostrabilidad de los teoremas de los triángulos homológicos de **Desargues** y del hexagrama de **Pascal** en la Geometría proyectiva plana, y esboza la extensión a los espacios de dimensión n .

Geometría enumerativa

Uno de los objetivos de la resolución de un problema de construcción geométrica consiste en determinar el número de sus soluciones. El estudio en este sentido lo llevaron mas o menos a buen puerto **Steiner**, **Plücker** y **Jonquières**, al plantearse diversos problemas de determinación de curvas algebraicas y de cónicas. **Chasles**, con su llamado método de las características, debía permitir un tratamiento de estos problemas y establecer numerosas propiedades de las cónicas por vía puramente geométrica. Basado en el principio de correspondencia entre dos series de puntos de una misma recta. Pero la nueva rama de la Geometría no estaba del todo asentada, y fue en el siglo XX, cuando se pudo establecer sus conexiones con el Álgebra, la Topología y la Geometría algebraica.

Superación de los problemas griegos

Los problemas de construcción resoluble con la ayuda de la regla y el compás gozaban de un tratamiento privilegiado desde la Antigüedad. En 1837, **P. L. Wantzel**, demostró que todo problema de este tipo corresponde a una ecuación cuya raíz se expresa por una serie finita de operaciones elementales (+, -, ·, :, √). La teoría de grupos permitió enunciar ese criterio en una forma más cómoda, mostrando **Wantzel**, que dos problemas clásicos, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, no pueden resolverse, en su caso general, con ayuda de la regla y el compás, dado que su solución equivale a resolver una ecuación de tercer grado. Lo mismo ocurre con el problema de la cuadratura del círculo, hecho que no se estableció hasta 1882, cuando **Lindemann**, demostró la trascendencia del número π . Otro problema típico era el de la división del círculo o lo que es igual la inscripción en un círculo de un polígono regular de n lados. Problema que fue resuelto de forma brillante por **Gauss**.

Las Geometrías no-euclídeas, y el problema de los fundamentos de la Geometría. Los trabajos críticos emprendidos por **Saccheri** y **Lambert**, para profundizar en la significación del célebre postulado de las paralelas habían revelado la existencia de tres posibles vías: una basada en una hipótesis equivalente al postulado y que lleva a la Geometría clásica; las otras dos basadas, de forma opuesta, en la recusación del postulado, y capaces de permitir la edificación ulterior de las geometrías no-euclídeas. **Saccheri** afirmó el absurdo de estas últimas hipótesis, mientras que **Lambert**, mostraba que se verifican en el estudio de las propiedades de figuras situadas en una esfera ordinaria, o en una esfera de radio imaginario. **Legendre** en un paciente análisis le permitió situar poco a poco el V postulado y su papel, o los de las proposiciones equivalentes, como la igualdad de la suma de los ángulos de un triángulo a dos rectos. **Gauss** se dedicó en profundidad al tema, mas sin publicar nada al respecto, y en 1799, dice que posee los principios de una nueva Geometría basada en la hipótesis de la existencia de infinitas paralelas a una recta, trazables por un punto exterior a ella. Es el primer modelo de Geometría no-euclídea, al que **Klein** bautiza como Geometría hiperbólica. **Gauss** apreció las ideas de **F. K. Schweikart**, en las cuales se afirma la coherencia de una Geometría independiente del V postulado, así como las ideas de **F. A. Taurinus**, que desarrolla las fórmulas de la Trigonometría sobre una esfera de radio imaginario. A las mismas ideas de **Gauss**, llegaron casi al unísono dos matemáticos, **Nicolai I. Lobachevsky**, (1792-1856) y **János Bolyai**. **Lobachevsky**, era profesor en **Kazán**, presentó un primer esbozo en 1826, de su "*Geometría hiperbólica*", que él llamaba "imaginaria", basada en la negación del V postulado, y en la afirmación de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es inferior a dos rectos. El joven **Bolyai** comunicó a su padre, **Farkas Bolyai**, que había concebido una nueva teoría de las paralelas, en el año 1823, y publicada en 1832, en un apéndice de una obra de su padre. En esencia su "*Geometría absoluta*" equivalía a la Geometría hiperbólica de **Gauss** y **Lobachevsky**. Mas, todos estos trabajos quedaron pronto en el olvido, por un motivo u otro, hasta que....

Intervención de Riemann

La Geometría y la teoría de los grupos. Un perfecto conocimiento de la teoría de los invariantes y sus profundas concepciones sobre el papel de la teoría de grupos, llevaron a **Felix Klein** (1849-1925) a una síntesis estructural muy amplia, en su famoso "*Programa de Erlangen*". Caracterizó los diferentes teoremas de la Geometría, las diversas orientaciones de la investigación, mediante los grupos de transformaciones correspondientes a cada una de ellas. Siendo cada Geometría la teoría de los invariantes de un grupo de transformaciones particular, así, la Geometría Euclídea es el estudio de los invariantes del grupo métrico, la Proyectiva, el estudio de los invariantes del grupo lineal, la topología es el estudio de los invariantes del grupo de transformaciones puntuales continuas. Las geometrías afín, algebraica y diferencial, se definen también en cuanto a su objetivo y sus límites precisos y se constituyen en disciplinas independientes.

Fundamentos de la Geometría

Con la difusión de las geometrías no-euclídeas y las teorías riemannianas, se promovió un análisis crítico de los principios de la Geometría y de su estructura de conjunto. Así, algunos postulados admitidos hasta entonces de forma implícita, se expusieron claramente, como los postulados de continuidad, (**Cantor** y **Dedekind**), el de **Arquímedes**, (**Stolz**), los de orden (**Gauss**, **Grassmann**, **Pasch**, que fue el primero que recalcó la existencia de conceptos primitivos a partir de los cuales deben enunciarse las proposiciones fundamentales que sirven para demostrar lógicamente las demás proposiciones o teoremas). Se criticaba abiertamente la concepción kantiana del espacio (**Riemann**), y los principales autores (**Klein**, **Poincaré**) definían la independencia de la Geometría de toda imagen física o psicológica. Con la introducción de la teoría de grupos, la influencia de los invariantes, etc, se propuso la axiomatización de la Geometría, por parte de **Pasch**, **Grassmann**. Pero fue **David Hilbert** (1862-1943) el primero en expresar esa síntesis de un modo claro y brillante con la axiomatización, evitando todo recurso a imágenes concretas, **Hilbert**, introduce los básicos elementos de puntos, rectas y planos. Estos objetos, cuya naturaleza no se precisa, cumplen ciertas relaciones expresadas por 21 axiomas, clasificados en 5 grupos: axiomas de pertenencia (8), de orden (4), de congruencia (6), axioma de las paralelas (1), y de continuidad (2). Deseaba que constituyesen una base suficiente para una entera reconstrucción de todo el edificio geométrico a partir de ellos y sin más ayuda que las reglas de la lógica y de la aritmética.

Renovación de la Geometría analítica

La Geometría analítica tuvo también una brillante expansión, señalada en el papel dominante de **Plücker**, y la intervención del Álgebra lineal, la introducción de la Geometría reglada y los espacios n dimensionales así como el crecimiento en paralelo de la Geometría algebraica y la Geometría Diferencial. Dentro de la escuela francesa encontramos los sucesores de **Monge**, a **Lacroix**, quien introdujo el término Geometría analítica, **Puissant**, **Lefrançois**, **Biot**, **Hachette**, **Dandelin**, **Gergonne**, **Cauchy**, **Lamé**. Este último introduce dos innovaciones importantes: la notación abreviada y el principio de los multiplicadores. **Gergonne** se esfuerza en que el principio de dualidad sea central en la analítica y **Bobillier** introduce notaciones que se encuentran cercanas a las coordenadas triangulares o tetraédricas y de las coordenadas homogéneas. Pero estas extensiones del concepto de coordenadas cobrarán plena carta de extensión a través de la escuela alemana con **Möbius** y **Plücker**, que con las coordenadas baricéntricas el primero, y la generalización del concepto de coordenadas por el segundo, pudieron evitar las dificultades de los cálculos de eliminación y llegar a los mismos resultados que la Geometría pura, así como llegar a los principios de dualidad y generalizar los conceptos de ecuación y coordenadas tangenciales, así como el término clase de una curva y la clasificación de las curvas algebraicas... etc. Pero si **Plücker** no se hace eco de los determinantes, otro matemático haría buen uso de ellos, **O. Hesse** (1811-1874), que le presentó sus resultados de un modo mucho más elegante a **Plücker**, y formulando de un modo definitivo las coordenadas homogéneas. Introdujo la noción de hessiano, perfeccionó el estudio de las curvas de tercer orden y de ciertas singularidades. **Cayley**, en Inglaterra, prosiguió los trabajos de **Plücker** y **Hesse**, pero con toda la fuerza del Álgebra lineal, con numerosos trabajos sobre transformaciones de coordenadas, las cuádricas, superficies de cuarto grado, y junto con **Salmon**, extendió las fórmulas de **Plücker**, para incluir curvas algebraicas del espacio y a las superficies. Desde entonces la Geometría analítica se encontró totalmente ligada a la Geometría algebraica, tanto, que ya era imposible una disolución.

La Geometría reglada

La Geometría de las rectas, desempeña un papel fundamental en Óptica y en Mecánica para la primera el estudio de los haces luminosos y para la segunda los

sistemas de fuerzas, así como su influencia en las demás geometrías, sintética, analítica e infinitesimal. Las nuevas ideas de coordenadas, hacen que se consideren las rectas como rayos descritos por un punto, ya como ejes del cual gira un plano, pero, la falta de un sistema adecuado para crear la dualidad hizo que **Plücker** ideara un sistema especial para denotar a las rectas, con la notación, ya clásica, de sus seis términos, $l, n, m, \lambda, \mu, \nu$, componentes de un vector las tres primeras y del momento del vector respecto del origen las tres últimas, ligadas por la relación bilineal: $\lambda + n\mu + m\nu = 0$. Este método fue sin duda analizado por **Monge** inicialmente, pero fue olvidado injustamente con el paso del tiempo. El triunfo repentino de la nueva notación, hace que atrajera a muchos autores, en Alemania, a **Klein, Pasch, Reye, Sturm**, en Italia, a **Segre, Battaglini**, en Francia a **Darboux, Halphen, Koenigs**, en Inglaterra, a **Cayley**, en Noruega a Lie, es decir a los grandes de la época, con lo cual la nueva notación se popularizó.

Las Geometrías de "n" dimensiones

Ya en 1685, **Wallis** había pensado en extender la Geometría al estudio de las propiedades de espacios de un número de dimensiones superior a tres. **D'Alembert** y **Lagrange**, tomando el tiempo como cuarta dimensión, vieron la posibilidad de considerar la Mecánica como una geometría de dimensión cuatro. Pero fueron **Grassmann** y **Cayley** los que perforaron la idea y las extendieron con toda su magnitud, mas sus influencias fueron pequeñas, hasta que **Klein** las divulgó, y los especialistas las fueron usando y aceptando paulatinamente.

Orígenes de la Geometría Algebraica

La convergencia de las diversas corrientes de la investigación en la segunda mitad del siglo XIX renovó los métodos de estudios de las curvas y las superficies algebraicas. **Mac Laurin** había aclarado en el XVIII la noción de curva unicursal, aquella que las coordenadas de su punto móvil pueden expresarse mediante funciones racionales de un parámetro, es una curva plana que posee el número máximo de $N = (n-1)(n-2)/2$ puntos dobles, compatibles con su grado n . Y el célebre teorema de **Abel**, sobre las integrales abelianas, permitió aclarar esta noción asociado a cada curva algebraica un número entero p , llamado género, e igual a $N - N^{\sim}$ (siendo N^{\sim} el número efectivo de puntos dobles, teniendo en cuenta, la presencia de puntos singulares. Las curvas unicursales forman así las de género nulo. **Riemann** renovó la cuestión al introducir el concepto de superficie de m hojas, llamadas de **Riemann**, y que es asociada a toda curva algebraica plana irreducible, C , de ecuación $f(x, y) = 0$ y de grado m en y .

Las transformaciones birracionales

El papel desempeñado por las transformaciones homográficas en Geometría Proyectiva, motivó el estudio de varios tipos más de transformaciones. Por ejemplo, la inversión, que conocida en su día por **Pappus**, fue recogida por muchos autores del siglo, como **Quetelet, Steiner**, etc, y las numerosas e importantes propiedades asociadas con esa transformación constituyen lo que se denomina la Geometría analagmática. La inversión pertenece a la familia de transformaciones circulares, estudiadas en el plano por **Möbius** y extendidas al espacio por **Liouville, Laguerre** y **Darboux**. A otro tipo de transformaciones pertenece las transformaciones cuadráticas, estudiadas por **Magnus**, que hacen corresponder a todo punto del plano M , el punto M^{\sim} , intersección de las rectas transformadas de M por dos correlaciones dadas. El primer ejemplo de este tipo de transformación lo dió en 1858 **Jonquières**, y en 1863, **Luigi Cremona**, emprendió la construcción de la teoría general de estas transformaciones algebraicas birracionales, llamadas cremonianas, que es el tipo de transformación biunívoca más general de los puntos del plano, con excepción de una serie de puntos denominados fundamentales. Estamos en los comienzos de la Geometría algebraica.

Continuación de la Geometría Diferencial

El rápido desarrollo del estudio de las curvas y superficies con los métodos del análisis continuó su desarrollo basándose en tres pilares fundamentales, **Monge**, **Gauss** y **Riemann**. **Monge**, influiría en geómetras posteriores como **Klein**, **Lie** y **Darboux**. Pero fue **Gauss**, con la introducción de las coordenadas curvilíneas, u y v sobre una superficie S , y por medio de la forma cuadrática fundamental $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, quien más influencia y seguidores tuvo, como **Minding**, **Lamé**, **Jacobi**, etc. Un nuevo impulso lo dió **Riemann** en su célebre tesis: "*Sobre las hipótesis implícitas en la Geometría*". En ella se generaliza a dimensión n las ideas de **Gauss**, y, algo más novedoso y que tantas consecuencias físicas tendría: considerar la posibilidad de una interacción entre el espacio y los cuerpos sumergidos en él. Otros autores fueron, **Lie**, **Darboux**, **Bianchi**, los cuales sintetizaron los conocimientos hasta los inicios del siglo XX.

APARICION DE LA TOPOLOGIA

La aparición de esta rama de la Matemática, tuvo su origen, en el problema de los siete puentes (Euler), en el de los nudos (**Gauss**, **Listing**, **Tait**, **Kirkman**), y en el difícil coloreado de un mapa por cuatro colores (**Möbius**, **Morgan**, **Cayley**, **Tait**, **Kempe**), así como la relación de los vértices, caras y aristas de los poliedros (**Euler**, **Descartes**). Pero el que los reunió para un uso analítico fue **Cauchy** a mediados de XIX, y en verdad comenzó a cristalizar con los trabajos de **Cayley** y **Listing**, en su obra, Lecciones de Topología; y **Möbius** que dio el primer ejemplo de superficie no orientable, unilátera.

Finalmente Riemann, fundamentó esta ciencia, concibiéndola como el estudio de las propiedades invariantes bajo el efecto de las transformaciones biunívocas continuas. Posteriormente, le seguirían, **Cantor**, **Jordan**, **Poincaré**, **Hadamard**, **Klein**, **Hilbert**, **Betti**, **Ascoli** y **Mittag-Leffler**.

Nota.- El siglo XX ha producido tantas ideas nuevas en Matemáticas, que un resumen puntual del mismo es tarea casi imposible.