

SOBRE LA DENSIDAD DE ENERGÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Si consideramos un sistema cerrado constituido por un campo electromagnético y un conjunto de partículas inmerso en el mismo, se mantiene constante en el tiempo la energía total del sistema, suma de la energía de las partículas y la energía del propio campo. ¿Cómo podemos calcular la energía del campo electromagnético en dicho sistema cerrado?. Veamos que, partiendo de las ecuaciones de Maxwell, es posible la determinación sencilla de dicha energía por unidad de volumen, es decir, la densidad de energía del campo.

1. Energía de una partícula en movimiento cualquiera. Su variación en el tiempo:

Consideremos la lagrangiana y la energía total de una partícula en movimiento:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Omega = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \vec{v} + mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Variación temporal de la energía:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = \frac{m \cdot \vec{v}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Variación temporal del momento lineal:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Por tanto, al comparar:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La variación temporal de la energía de una partícula es igual al producto interior de su velocidad por la variación temporal de su momento lineal.

Esta relación se verifica obviamente en la mecánica clásica no relativista:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \frac{1}{2} 2m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2. Partícula inmersa en un campo electromagnético. La fuerza de Lorentz:

Para una partícula de carga q inmersa en un campo electromagnético de potencial vectorial \vec{A} y de potencial escalar ϕ , la expresión de la lagrangiana es:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q \cdot \phi$$

y si usamos las ecuaciones de Lagrange para campos conservativos, podemos obtener de inmediato las ecuaciones del movimiento. Actuando vectorialmente por simplicidad, escribimos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

y las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} L = \frac{q}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \vec{\nabla} \phi$$

podemos simplificar la segunda expresión usando la fórmula vectorial para el gradiente de un producto interior:

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

pues los sumandos y tercero de la expresión se anulan por contener derivadas de la velocidad respecto de las coordenadas.

Por otra parte:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

y se tiene, en definitiva:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{q}{c} ((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})) - q \vec{\nabla} \phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \\ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{q}{c} ((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})) - q \vec{\nabla} \phi \end{array} \right. \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{q}{c} ((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})) - q \vec{\nabla} \phi$$

o bien:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - q \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \vec{\nabla} \phi + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) =$$

$$= q \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = q \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H}$$

$$\vec{f}_L = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H}$$

(Fuerza de Lorentz)

3. Variación temporal de la energía de una partícula inmersa en un campo electromagnético:

$$d\Omega = \vec{f}_L \cdot d\vec{r} = \left(q \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \right) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = \left(q \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \right) \cdot \vec{v} = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}$$

pues $\left(\frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \right) \cdot \vec{v} = 0$, por tratarse del producto interior de dos vectores perpendiculares.

Si se trata de un conjunto de partículas, la energía total es la suma de las energías de todas las partículas

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

y la variación total de energía en un determinado volumen V:

$$\frac{d}{dt} \Omega_V = \frac{d}{dt} \int_V \Omega \cdot dV = \int_V \frac{d\Omega}{dt} \cdot dV = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

4. El vector de Poynting:

Se define como la expresión:

$$\vec{\Psi} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}$$

y, como veremos a continuación, está relacionado con la energía total del sistema campo-partículas y del flujo de dicha energía a través de la superficie de un volumen finito.

5. Relación entre la variación de la energía de un conjunto de partículas y el vector de Poynting:

Podemos obtener una relación sencilla entre la variación temporal de energía de las partículas en un campo electromagnético y el vector de Poynting, sin más que combinar algebricamente el par de ecuaciones rotacionales de Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} \end{cases}$$

multiplicando por \vec{H} la primera y por \vec{E} la segunda, y sumando a continuación, se tiene:

$$\begin{cases} \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} \cdot \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{c} \left[\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} - [\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H}]$$

o bien:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

que podemos expresar por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}$$

integrando en un volumen V:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} dV$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{\Psi} \cdot dS$$

Si el volumen es infinito se anula la integral de superficie del vector de Poynting, pues el campo es nulo en la superficie del volumen. Quedaría, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) dV + \frac{d}{dt} \Omega_V = 0$$

en definitiva:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) dV + \Omega_V \right] = 0$$

Esto es, la variación en el tiempo de la energía total del sistema campo-partículas es nula. La energía total es la suma de la energía de las partículas con la energía del campo, de lo cual deducimos que

$$\int_V \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) dV$$

es la energía del campo electromagnético, y la densidad de energía por unidad de tiempo vendrá dada por

$$\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}$$

Si el volumen no es infinito, la integral del vector de Poynting no se anula, por lo que puede interpretarse como una medida del flujo de energía total a través de la superficie que envuelve al volumen finito.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \right) dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{\Psi} \cdot dS$$

Bibliografía:

LANDAU, L_LIFSHITZ, E; Teoría Clásica de los Campos (Vol II del curso de Física Teórica), Edit. Reverté, Barcelona, 1960.

LANDAU, L_LIFSHITZ, E; Mecánica y Electrodinámica (Vol I del curso abreviado de Física Teórica), Edit. Mir, Moscú, 1979.

Carlos S. China
casanchi@teleline.es