

De las Fuerzas Conservativas y el trabajo. Aplicando la Mecánica Newtoniana

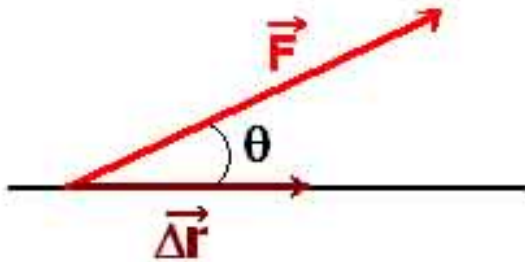
Son las fuerzas que dependen de un potencial, esto es, que realizan el mismo trabajo entre dos puntos sin que importe la trayectoria seguida. La energía desarrollada entre dos instantes de tiempo se mantiene invariante.

1. Trabajo realizado por una fuerza:

1.1. Definición de trabajo:

Se define el trabajo realizado por una fuerza \vec{F} sobre una partícula como el producto interior de la fuerza por el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ de la partícula.

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

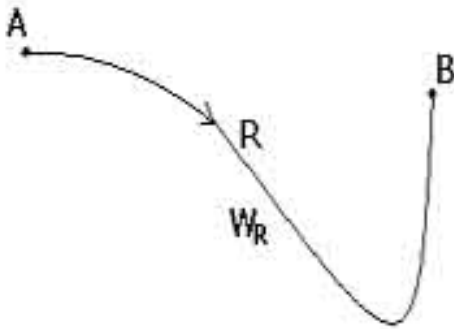


$$W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos\theta$$

- Si el desplazamiento es perpendicular a la dirección de la fuerza \vec{F} , el trabajo es nulo.

$$\text{si } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- El desplazamiento de la partícula es en general curvilíneo a lo largo de una curva R.



Si usamos un parámetro u para describir la trayectoria, variando entre dos valores u_A y u_B , se tendría en realidad que la trayectoria es una función de la forma

$$R: u \in [u_A, u_B] \rightarrow (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) \in R^3$$

Es decir, para cada valor u del parámetro hay un punto (x_1, x_2, x_3) de la trayectoria. Si consideramos n valores del parámetro, la variación media será

$$\Delta u_n = \frac{u_B - u_A}{n}$$

Si llamamos, para $j=0, 1, \dots, n$, $v_j = u_A + j \Delta u_n$, de lo cual $v_j = v_{j-1} + j \Delta u_n$

Y el trabajo, a lo largo de la trayectoria se obtiene como la suma del trabajo en cada punto:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r} = \vec{F}(\vec{r}(v_{j-1})) \cdot (\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_{j-1}))$$

es, decir, el trabajo en cada uno de los puntos v_0, v_1, \dots, v_n :

$$\vec{F}(\vec{r}(v_0)) \cdot (\vec{r}(v_1) - \vec{r}(v_0)), \vec{F}(\vec{r}(v_1)) \cdot (\vec{r}(v_2) - \vec{r}(v_1)), \dots, \vec{F}(\vec{r}(v_{n-1})) \cdot (\vec{r}(v_n) - \vec{r}(v_{n-1}))$$

y el trabajo total será, en los n puntos del intervalo paramétrico:

$$W_R^n = \sum_{j=1}^n \vec{F}(\vec{r}(v_{j-1})) \cdot (\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_{j-1}))$$

Si suponemos continua la trayectoria, es decir, con infinitos puntos en el intervalo de variación del parámetro, se obtiene el trabajo pasando al límite:

$$W_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \vec{F}(\vec{r}(v_{j-1})) \cdot (\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_{j-1}))$$

y queda la expresión integral:

$$W_R = \int_R \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

1.2. Cambio de parámetro:

Si cambiamos la parametrización pasando al parámetro u :

$$R: u \in [u_A, u_B] \rightarrow (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) \in R^3$$

$$W_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \vec{F}(\vec{r}(v_{j-1})) \cdot \frac{\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_{j-1})}{\Delta u_n} \Delta u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \vec{F}(\vec{r}(v_{j-1})) \cdot \frac{\vec{r}(v_{j-1} + \Delta u_n) - \vec{r}(v_{j-1})}{\Delta u_n} \Delta u_n$$

Por tanto queda, en expresión integral:

$$W_R = \int_R \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{du} \cdot du = \int_{u_A}^{u_B} \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = - \int_{u_B}^{u_A} \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du$$

Lo que nos indica que al invertir el sentido de la trayectoria, el trabajo realizado cambia de signo.

1.2. Parámetro temporal:

Si usamos como parámetro el tiempo, es decir, si la trayectoria R se define en función de los valores en un intervalo temporal:

$$R: t \in [t_A, t_B] \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in R^3$$

Y se tiene:

$$W_R = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_B} p(t) \cdot dt$$

Donde es $p(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)$, expresión que se denomina *potencia*.

1.3. Parametrización natural:

Para la parametrización natural s , se expresa la trayectoria R de la forma:

$$R: s \in [s_A, s_B] \rightarrow (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \in R^3$$

Y es, en este caso:

$$W_R = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{U}_T(s) ds = \int_{s_A}^{s_B} F_T(\vec{r}(s)) ds$$

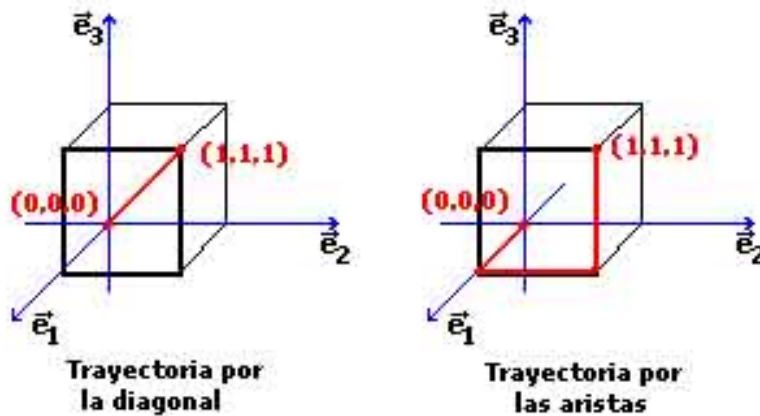
Donde es $F_T(s) = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{U}_T$ la componente de la fuerza tangencial a la trayectoria (\vec{U}_T es el vector unitario tangencial).

1.4. Ejemplo de cálculo del trabajo entre dos puntos:

Ejemplo 1: Cálculo del trabajo W_R realizado entre los dos puntos extremos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$ de la diagonal de un cubo de arista unidad por una fuerza de expresión:

$$\vec{F}(\vec{r}) = c(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) \quad (c \text{ constante})$$

a lo largo de dos trayectorias distintas.



- Primer caso: la trayectoria es la diagonal que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$:

Expresión del radio vector:

Podemos tomar el parámetro en el intervalo $[0,1]$:

$$u \in [u_A, u_B] \rightarrow (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) \in R^3$$

$$\text{con lo cual: } \vec{r}(u) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = u \cdot \vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_2 + u \cdot \vec{e}_3 \rightarrow \frac{d\vec{r}(u)}{du} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Expresión de la fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}(u)) = c(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) = c \cdot \vec{r}(u)$$

Trabajo:

$$\begin{aligned} W &= \int_R \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{du} \cdot du = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \int_0^1 c \cdot \vec{r}(u) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \\ &= \int_0^1 c(u \cdot \vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_2 + u \cdot \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot du = \int_0^1 c \cdot 3u \cdot du = c \left. \frac{3}{2} u^2 \right|_0^1 = \frac{3}{2} c \end{aligned}$$

- Segundo caso: la trayectoria sigue tres de las aristas del cubo:

En este caso hemos de calcular el trabajo en los tres tramos y luego sumar los resultados: primero, a lo largo del eje x, desde (0,0,0) a (1,0,0), en segundo lugar por la arista paralela el eje y desde el punto (1,0,0) al punto (1,1,0), y finalmente por la arista paralela al eje z desde el punto (1,1,0) al punto (1,1,1). Veamos:

a) Desde (0,0,0) a (1,0,0):

Expresión del radio vector:

Tomamos también el parámetro en el intervalo [0,1]:

$$u \in [u_A, u_B] \rightarrow (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) \in R^3$$

$$\text{con lo cual: } \vec{r}(u) = x_1 \cdot \vec{e}_1 = u \cdot \vec{e}_1 \rightarrow \frac{d\vec{r}(u)}{du} = \vec{e}_1$$

Expresión de la fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}(u)) = c(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) = c \cdot (u \cdot \vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_3)$$

Trabajo:

$$\begin{aligned} W_{R_1} &= \int_R \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{du} \cdot du = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \int_0^1 c \cdot r(u \cdot \vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_3) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \\ &= \int_0^1 c(u \cdot \vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_1 \cdot du = \int_0^1 c \cdot u \cdot du = c \left. \frac{1}{2} u^2 \right|_0^1 = \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

b) Desde (1,0,0) a (1,1,0):

Expresión del radio vector:

Tomamos como antes el parámetro en el intervalo [0,1]:

$$u \in [u_A, u_B] \rightarrow (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) \in R^3$$

$$\text{con lo cual: } \vec{r}(u) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rightarrow \frac{d\vec{r}(u)}{du} = \vec{e}_2$$

Expresión de la fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}(u)) = c(\vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = c \cdot \vec{r}(u)$$

Trabajo:

$$\begin{aligned} W_{R_2} &= \int_R \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{du} \cdot du = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \int_0^1 c \cdot (\vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \\ &= \int_0^1 c(\vec{e}_1 + u \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 \cdot du = \int_0^1 c \cdot u \cdot du = c \left. \frac{1}{2} u^2 \right|_0^1 = \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

c) Desde (1,1,0) a (1,1,1):

Expresión del radio vector:

Aquí también el parámetro se toma en el intervalo [0,1]:

$$u \in [u_A, u_B] \rightarrow (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) \in R^3$$

$$\text{con lo cual: } \vec{r}(u) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + u \cdot \vec{e}_3 \rightarrow \frac{d\vec{r}(u)}{du} = \vec{e}_3$$

Expresión de la fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}(u)) = c(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) = c \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

Trabajo:

$$\begin{aligned} W_{R_3} &= \int_R \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{du} \cdot du = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \int_0^1 c \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot \frac{d\vec{r}(u)}{du} \cdot du = \\ &= \int_0^1 c(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 \cdot du = \int_0^1 c \cdot du = cu \Big|_0^1 = c \end{aligned}$$

En resumen:

El trabajo total en la trayectoria por las tres aristas resulta ser, por tanto:

$$W' = W_{R_1} + W_{R_2} + W_{R_3} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c + c = 2c$$

mientras que el trabajo realizado a lo largo de la diagonal era:

$$W = \frac{3}{2}c$$

por tanto, resulta ser distinto el trabajo realizado a lo largo de cada una de las dos trayectorias:

$$W \neq W'$$

Este es un ejemplo, por tanto, de una fuerza tal que el trabajo realizado para llevar una partícula de un punto a otro depende de la trayectoria elegida. Existen fuerzas, como veremos más adelante, en donde la trayectoria elegida no influye en el trabajo.

1.5. Teorema de las Fuerzas Vivas:

Enunciado: *El trabajo realizado por la fuerza neta actuante sobre una partícula es siempre igual a la variación de su energía cinética.*

Demostración:

Consideremos la parametrización temporal:

$$R: t \in [t_A, t_B] \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in R^3$$

Y sea:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}}(t) &= \vec{F}(t) \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) &= \vec{v}_0 \end{cases}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} W_R &= \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot dt = \int_{t_A}^{t_B} dt \cdot m \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_B} m \cdot \vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t) = \\ &= m \cdot \frac{1}{2} \vec{v}(t)^2 \Big|_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}(t_B)^2 - \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}(t_A)^2 \end{aligned}$$

O sea:

$$W_R = E_c(t_B) - E_c(t_A)$$

2. Trabajo realizado por Fuerzas conservativas:

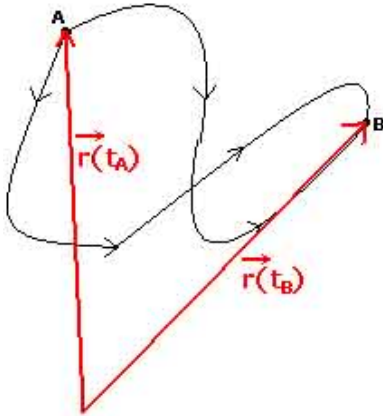
2.1. Fuerzas conservativas

Un campo de fuerzas se dice *conservativo* si el trabajo necesario para llevar una partícula de un punto a otro del campo es independiente de la trayectoria seguida.

Ejemplo:

Sea un campo de fuerzas constante: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}_0 = cte$

$$\text{Se tiene: } W_R = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(t) \cdot dt = \vec{r}_0 \cdot \int_{t_A}^{t_B} \vec{v}(t) \cdot dt = \vec{r}_0 \cdot \int_{t_A}^{t_B} d\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}(t) \Big|_{t_A}^{t_B} = \vec{r}_0 \cdot (\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A))$$



Al ser, pues, $W_R = \vec{r}_0 \cdot (\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A))$, el trabajo no depende de la trayectoria seguida sino de la posición inicial y final de la partícula. Por consiguiente, el campo es conservativo.

2.2. Teorema del potencial

Para toda fuerza conservativa, $F(\vec{r})$, existe una función, $\phi(\vec{r})$, tal que $F(\vec{r})$ es el gradiente de la función $\phi(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

La función $\phi(\vec{r})$ se llama *Función potencial*, cumpliendo, por consiguiente, la relación: $d\phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.

Demostración:

Veamos en primer lugar que si la fuerza es conservativa, entonces $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$:

Bastará hacer que la función potencial sea el trabajo necesario para llevar una partícula desde un punto A hasta un punto B. Se tiene, entonces, usando la parametrización natural s:

$$\phi(\vec{r}) = W_{AB} = \int_A^B ds \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \int_A^B ds \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{U}_T(s)$$

es decir: $d\phi(\vec{r}) = ds \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{U}_T(s)$, por lo cual: $\frac{d\phi(\vec{r})}{ds} = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{U}_T(s)$

por otra parte se tiene:

$$\frac{d\phi(\vec{r})}{ds} = \frac{d\phi(\vec{r})}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{U}_T(s)$$

por lo cual, al identificar ambas expresiones:

$$\vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{U}_T(s) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{U}_T(s)$$

de lo cual, se tiene que $(\vec{F}(\vec{r}(s)) - \vec{\nabla} \phi(\vec{r})) \cdot \vec{U}_T(s) = 0$, y siendo $\vec{U}_T(s)$ un vector tangente a la trayectoria, y ésta, a su vez cualquiera, tendrá que ser necesariamente cero la diferencia $\vec{F}(\vec{r}(s)) - \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = 0$, y, por tanto:

$$\vec{F}(\vec{r}(s)) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

Veamos ahora el recíproco, es decir, si se verifica $\vec{F}(\vec{r}(s)) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$ entonces, necesariamente, la fuerza es conservativa:

La expresión del trabajo para llevar la partícula desde el punto A hasta el punto B es:

$$W_{AB} = \int_A^B ds \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \int_A^B ds \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \int_A^B \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}(s) = \int_A^B d\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}(s_B)) - \phi(\vec{r}(s_A))$$

solo depende, pues, del valor final y del valor inicial de la función potencial $\phi(\vec{r})$, por lo cual, es conservativo.

En definitiva tenemos que, por verificarse este teorema, es equivalente afirmar que un campo es conservativo si el trabajo es independiente de la trayectoria, o bien que un campo es conservativo si es el gradiente de una función potencial.

Veamos en lo que sigue dos ejemplos de campos de fuerzas en donde dilucidamos su carácter conservativo mediante el análisis de la posible existencia de una función potencial.

Ejemplos:

- Ejemplo de campo conservativo:

Sea el campo definido por la función fuerza $\vec{F}(\vec{r}) = c(2x_1x_2.\vec{e}_1 + x_1^2.\vec{e}_2)$

Identificando componentes con las derivadas parciales de un posible potencial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \Rightarrow F_1(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, F_2(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, F_3(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

o sea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = 2cx_1x_2 &\rightarrow \phi(\vec{r}) = cx_1^2x_2 + k(x_2, x_3) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = cx_1^2 &\rightarrow \phi(\vec{r}) = cx_1^2x_2 + k(x_1, x_3) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0 &\rightarrow \phi(\vec{r}) = k(x_1, x_2) \Rightarrow \phi(\vec{r}) \text{ no depende de } x_3 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= cx_1^2x_2 + k(x_2) \\ \phi(\vec{r}) &= cx_1^2x_2 + k(x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow cx_1^2x_2 + k(x_1) = cx_1^2x_2 + k(x_2) \Rightarrow k(x_1) = k(x_2) = const.$$

Por consiguiente el potencial existe y es:

$$\phi(\vec{r}) = cx_1^2x_2 + k$$

por lo cual el campo $\vec{F}(\vec{r}) = c(2x_1x_2.\vec{e}_1 + x_1^2.\vec{e}_2)$ es conservativo.

- Ejemplo de campo no conservativo:

Sea el campo definido por la función de fuerza $\vec{F}(\vec{r}) = c((x_1^2 - x_2^2)^2.\vec{e}_1 + 3x_1x_2.\vec{e}_2)$

Si existiera potencial tendríamos:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \Rightarrow F_1(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, F_2(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, F_3(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

pero se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = c(x_1^2 - x_2^2)^2 &\rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{c}{3}x_1^3 - cx_2^2x_1 + k(x_2, x_3) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = 3cx_1x_2 &\rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{3c}{2}x_1x_2^2 + k(x_1, x_3) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0 &\rightarrow \phi(\vec{r}) = k(x_1, x_2) \end{aligned}$$

De lo que se deduce que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{c}{3}x_1^3 - cx_2^2x_1 + k(x_2) = \frac{3c}{2}x_1x_2^2 + k(x_1)$$

Lo cual implicaría que

$$k(x_2) - k(x_1) = \frac{c}{3}x_1^3 - cx_2^2x_1 + k(x_2) - \frac{3c}{2}x_1x_2^2$$

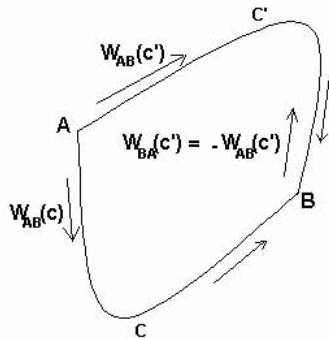
Lo cual es imposible, pues no se pueden separar las variables en la diferencia indicada.

2.3. La Trayectoria y las fuerzas conservativas:

Teorema: Un campo de fuerzas $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si, y solo si, el trabajo realizado a través de cualquier trayectoria cerrada es cero.

Demostración:

- a) Si el campo de fuerzas es conservativo, el trabajo realizado entre dos puntos no depende de la trayectoria seguida, esto es, será $W_{AB}(c) = W_{AB}(c')$, si llamamos $W_{AB}(c)$ y $W_{AB}(c')$ al trabajo realizado desde el punto A hasta el punto B, a lo largo de la trayectoria c y a lo largo de la trayectoria c', respectivamente. Se tendrá, por ejemplo, que el trabajo realizado desde el punto B hasta el punto A a lo largo de c' es $W_{BA}(c') = -W_{AB}(c')$.



Por lo cual, el trabajo realizado desde A hasta B por la trayectoria c más el trabajo realizado desde B hasta A por la trayectoria c', define el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada, que es nulo:

$$W_{AB}(c) + W_{BA}(c') = W_{AB}(c) - W_{AB}(c') = 0$$

- b) Por otra parte, se tiene que si $W_{AB}(c) + W_{BA}(c') = 0$, será entonces: $W_{AB}(c) = -W_{BA}(c') \Rightarrow W_{AB}(c) = W_{AB}(c')$, con lo cual el trabajo no depende de la trayectoria elegida, lo que indica que el campo es conservativo.

Teorema: Si el campo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es conservativo y de clase 1, entonces se cumplen las relaciones

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$$

(clase 1: derivable y con derivada continua)

Demostración:

Por ser $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_1(\vec{r}) &= \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_1} \\ F_2(\vec{r}) &= \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_2} \\ F_3(\vec{r}) &= \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Haciendo las derivadas con respecto a las demás variables:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(\vec{r})}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x_2\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_2(\vec{r})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1(\vec{r})}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x_3\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial F_3(\vec{r})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_3(\vec{r})}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F_2(\vec{r})}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Veamos que el campo $\vec{F}(\vec{r}) = c((x_1^2 - x_2^2)^2 \cdot \vec{e}_1 + 3x_1x_2 \cdot \vec{e}_2)$, del cual sabemos, por un ejemplo anterior, que no es conservativo, no verifica esta condición:

Puesto que es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(\vec{r})}{\partial x_2} &= -2cx_2 \\ \frac{\partial F_2(\vec{r})}{\partial x_1} &= 3cx_2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial F_1(\vec{r})}{\partial x_2} \neq \frac{\partial F_2(\vec{r})}{\partial x_1}$$

Teorema: El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, pueden verificarse las igualdades

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$$

Y el campo puede no ser conservativo.

Demostración: Bastará un contraejemplo. Veamos el siguiente:

$$\vec{F}(\vec{r}) = c \cdot \left[-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \vec{e}_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \vec{e}_2 \right]$$

Veamos en primer lugar que son iguales las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Y veamos ahora que, sin embargo, no es conservativo, esto es, no existe una función potencial $\phi(\vec{r})$ tal que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

Veámoslo primero usando coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} F_1(r) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &\Rightarrow \phi(r) = \int \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \varphi(x_2, x_3) \\ F_1(r) = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &\Rightarrow \phi(r) = \int \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 + \varphi(x_1, x_3) \\ F_1(r) = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0 &\Rightarrow \phi(r) = cte + \varphi(x_1, x_2) \end{aligned}$$

O sea,

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \varphi_1(x_2) \\ \phi(r) &= \int \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 + \varphi_1(x_1) \\ \phi(r) &= cte \end{aligned}$$

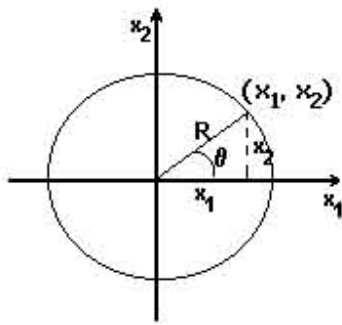
De lo cual se deduce que nunca podrá ser $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$

Veámoslo ahora usando coordenadas polares:

Si fuera conservativo tendría que ser nula la siguiente integral a lo largo de cualquier trayectoria cerrada:

$$W_{AA} = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} = 0$$

Se tienen las relaciones:



$$x_1 = R \cdot \cos \theta, \quad x_2 = R \cdot \sin \theta$$

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = \frac{c}{R} (-\sin \theta \cdot \vec{e}_1 + \cos \theta \cdot \vec{e}_2)$$

$$\vec{r}(\theta) = R \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_1 + R \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_2$$

$$\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} = -R \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_1 + R \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_2$$

Y por consiguiente:

$$\oint_{CIRC} d\theta \cdot \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} = \oint_{CIRC} d\theta \cdot \left(c \cdot \frac{R}{R} \cdot \sin^2 \theta + c \cdot \frac{R}{R} \cdot \cos^2 \theta \right) = c \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi c \neq 0$$

Por tanto, no es conservativo.

Ejemplo:

El campo $\vec{F} = c\vec{e}$ es conservativo, es decir, existe una función potencial tal que

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$$

En efecto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = F_1 \Rightarrow \phi(\vec{r}) = F_1 \cdot x_1 + \varphi(x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = F_2 \Rightarrow \phi(\vec{r}) = F_2 \cdot x_2 + \varphi(x_3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = F_3 \Rightarrow \phi(\vec{r}) = F_3 \cdot x_3 + cte$$

Por tanto, es:

$$\phi(\vec{r}) = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + cte.$$

Proposición: Si una fuerza es central y conservativa, la función potencial ϕ solo puede depender de la distancia al centro de la fuerza.

Demostración:

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} d\theta \cdot \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot d\vec{r}(\theta) = \int_{r_A}^{r_B} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} d\phi = \phi(r_B) - \phi(r_A)$$

2.4. El Teorema de Conservación de la Energía:

Cuando una partícula está sometida a fuerzas conservativas y no conservativas, la variación de energía mecánica entre dos instantes t_1 y t_2 es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas a lo largo de la trayectoria real de la partícula entre esos dos instantes de tiempo.

Si las fuerzas no conservativas no existen, o bien realizan un trabajo nulo, entonces la energía mecánica se conserva.

Demostración:

Llamemos:

Energía Cinética en el instante t : $E_c(t) = \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}(t)^2$

Energía Potencial en el instante t : $E_p(t) = -\phi(\vec{r}(t))$

Energía Mecánica en el instante t : $E_M(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}(t)^2 - \phi(\vec{r}(t))$

Trabajo realizado por las fuerzas conservativas a lo largo de la trayectoria γ :

$$W_\gamma^c(t_o, t_f) = \phi(\vec{r}(t_f)) - \phi(\vec{r}(t_o))$$

Trabajo total realizado a lo largo de la trayectoria γ :

$$W_\gamma(t_o, t_f) = E_c(t_f) - E_c(t_o)$$

Trabajo realizado por las fuerzas no conservativas:

$$\begin{aligned} W_\gamma^{nc}(t_o, t_f) &= W_\gamma(t_o, t_f) - W_\gamma^c(t_o, t_f) = [E_c(t_f) - E_c(t_o)] - [\phi(\vec{r}(t_f)) - \phi(\vec{r}(t_o))] = \\ &= [E_c(t_f) - \phi(\vec{r}(t_f))] - [E_c(t_o) - \phi(\vec{r}(t_o))] = [E_c(t_f) + E_p(t_f)] - [E_c(t_o) + E_p(t_o)] = \\ &= E_M(t_f) - E_M(t_o) \end{aligned}$$

O sea, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es la diferencia entre la energía mecánica final y la energía mecánica inicial:

$$W_\gamma^{nc}(t_o, t_f) = E_M(t_f) - E_M(t_o)$$

Si no existen fuerzas no conservativas, o bien es nulo el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, entonces:

$$E_M(t_f) - E_M(t_o) = 0 \Rightarrow E_M(t_o) = E_M(t_f)$$

Es decir, si solo hay fuerzas conservativas, la energía mecánica total se conserva.

3. Bibliografía:

ALONSO, S.M.; FINN, E.J. FISICA, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. 1987

SEARS-ZEMANSKY-YOUNG, FISICA UNIVERSITARIA, Editorial Fondo Educativo Interamericano.

BURBANO DE ERCILLA, S.; OTROS, FISICA GENERAL, Editorial Mira Editores. 1993

TIPPLER, P.A., FISICA, Editorial Reverté.

GARTENHAUS, S., FISICA, Ed. Interamericana.