EL MOVIMIENTO ABSOLUTO DE UNA PARTÍCULA. UN ESTUDIO INTRÍNSECO.

El movimiento de una partícula material en el espacio de tres dimensiones puede ser referido a un sistema cartesiano fijo, a un triedro exterior, y respecto al cual se desplaza la partícula, pero también puede referirse un triedro solidario a la partícula y que, por consiguiente, se desplaza con ella.

En el primer caso decimos que el movimiento absoluto de la partícula se refiere de forma extrínseca o cartesiana, y en el segundo caso, que se hace una referencia intrínseca del movimiento.

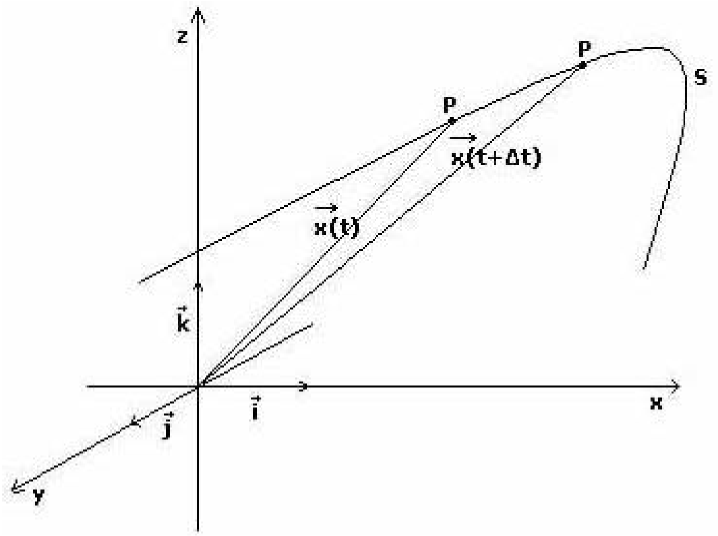
1. Las magnitudes básicas:

Sea una partícula P que en un determinado instante se encuentra en la posición indicada por el vector $\vec{x}(t)$ con referencia al triedro externo K.

Se define la velocidad y la aceleración instantánea de la partícula P con respecto al sistema K, por las derivadas respectivas del vector $\vec{x}(t)$:

Velocidad: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ Aceleración: $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$

La trayectoria de la partícula es el arco de curva S descrito en su movimiento.



La partícula se desplaza en su trayectoria definida por el arco S al variar el tiempo. El sistema de referencia K permanece inmóvil en el exterior.

Respecto del sistema K se expresan los vectores de posición de la partícula, de su velocidad y de su aceleración mediante las correspondientes derivadas.

El triedro $K = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ está fijo y sirve de referencia cartesiana a la expresión de la velocidad y la aceleración.

$$\vec{v}(t) = v_1(t).\vec{i} + v_2(t).\vec{j} + v_3(t).\vec{k} \qquad \vec{a}(t) = a_1(t).\vec{i} + a_2(t).\vec{j} + a_3(t).\vec{k}$$

En un intervalo de tiempo cualquiera $[t_1, t_2]$ la partícula describe un arco de curva S(t), t$\in [t_1, t_2]$. Podemos, también, eliminar el tiempo y tomar el arco S como parámetro.

Teorema: El vector $\frac{d\vec{x}(t)}{dS}$ es unitario, es decir, de módulo 1.

Efectivamente: $dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \rightarrow dS^2 = d\vec{x}.d\vec{x} \rightarrow \frac{d\vec{x}}{dS}.\frac{d\vec{x}}{dS} = 1 \rightarrow \left|\frac{d\vec{x}}{dS}\right| = 1$

2. Un triedro móvil fijo a la partícula:

El vector unitario $\vec{e}_t = \frac{d\vec{x}}{dS}$ se llama *vector unitario tangente a la trayectoria,* o, simplemente, *versor tangente*. Puesto que su módulo es constante (la unidad), su variación con respecto a cualquier variable es solamente de dirección.

Esto nos indica que su derivada con respecto al arco S es perpendicular al mismo:

$$\frac{d\vec{e}_t}{dS} \text{ es perpendicular al vector } \vec{e}_t = \frac{d\vec{x}}{dS}$$

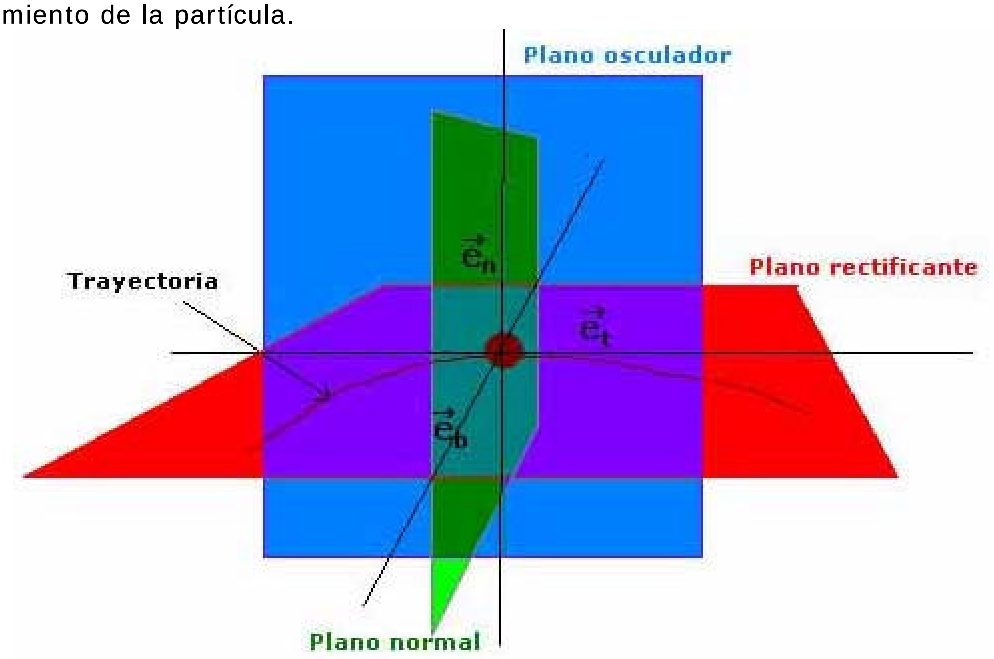
Llamaremos *vector unitario normal a la trayectoria*, o, simplemente, *versor normal*, al vector unitario:

$$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_t}{dS} \Big/ \left| \frac{d\vec{e}_t}{dS} \right|$$

Finalmente, definimos el *vector binormal a la trayectoria,* o bien, *versor binormal*, como el vector unitario $\vec{e}_b$ que cumple la condición vectorial

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n$$

Los tres versores anteriores definen un triedro solidario a la partícula en su movimiento que se denomina *triedro móvil* o también *triedro intrínseco* en el movimiento de la partícula.



Los tres planos del triedro móvil se llaman:

- plano osculador (Π_o): definido por los versores tangente y normal $\{\vec{e}_t, \vec{e}_n\}$.
- plano normal (Π_n): definido por los versores normal y binormal $\{\vec{e}_n, \vec{e}_b\}$.
- plano rectificante (Π_r): definido por los versores tangente y binormal $\{\vec{e}_t, \vec{e}_b\}$.

La *dirección tangencial del movimiento* es la intersección de los planos osculador y rectificante, y es una subvariedad engendrada por el versor tangente.

$$\Pi_o \cap \Pi_r \text{ , engendrada por } \vec{e}_t$$

La *dirección normal del movimiento* es la intersección de los planos normal y osculador, y es una subvariedad engendrada por el versor normal.

$$\Pi_o \cap \Pi_n \text{ , engendrada por } \vec{e}_n$$

La *dirección binormal del movimiento* es la intersección de los planos rectificante y normal, y e un subvariedad engendrada por el versor binormal.

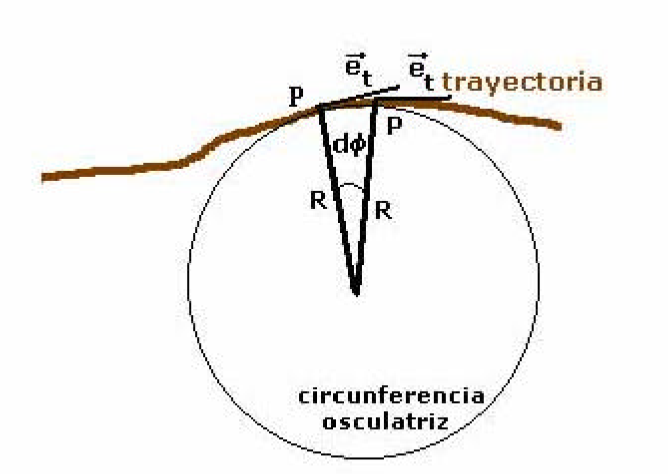
$$\Pi_r \cap \Pi_n \text{ , engendrado por } \vec{e}_b$$

Radio de curvatura:

Se llama radio de curvatura R de la trayectoria de la partícula al radio de la circunferencia osculatriz (tangente a la trayectoria y contenida en el plano osculador) en el punto de la situación de la partícula.

El módulo de la variación del versor tangente con respecto al arco:

Se verifica que es $\left|\frac{d\vec{e}_t}{dS}\right| = \frac{1}{R}$. En efecto, de la figura se tiene que es $dS = R.df$, y también es $|d\vec{e}_t| = |\vec{e}(s)|.df = 1.df = df$, por lo cual: $d\vec{e}_t = \frac{dS}{R} \rightarrow \left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \frac{1}{R}$



3. Expresión intrínseca de la velocidad y de la aceleración:

El vector velocidad pertenece a la dirección tangencial del movimiento:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\frac{d\vec{x}(t)}{ds}.\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}.\vec{e}_t$$

que podemos representar por: $\vec{v}(t)=\dot{s}.\vec{e}_t$

El vector aceleración pertenece al plano osculador:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{e}_t\right)=\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e}_t+\frac{ds}{dt}.\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e}_t+\left(\frac{ds}{dt}.\right)^2.\frac{d\vec{e}_t}{ds}=$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e}_t+\left(\frac{ds}{dt}.\right)^2.\left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right|.\vec{e}_n=\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e}_t+\left(\frac{ds}{dt}.\right)^2.\frac{1}{R}.\vec{e}_n$$

que representamos por: $\vec{a}(t)=\ddot{s}.\vec{e}_t+\frac{\dot{s}^2}{R}.\vec{e}_n$

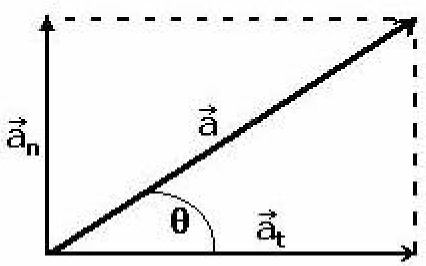
El primer sumando de la expresión del vector aceleración se llama *aceleración tangencial,* y está en la dirección del versor tangente, y el segundo sumando se llama *aceleración normal* y tiene la dirección del versor normal.

aceleración tangencial: $\vec{a}_t(t)=\ddot{s}.\vec{e}_t$, aceleración normal: $\vec{a}_n(t)=\frac{\dot{s}^2}{R}.\vec{e}_n$

en definitiva, la expresión intrínseca de la velocidad y la aceleración viene dada por

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{v}(t)=\dot{s}.\vec{e}_t\\ \vec{a}(t)=\ddot{s}.\vec{e}_t+\frac{\dot{s}^2}{R}.\vec{e}_n\end{gathered}}$$

Expresiones de la aceleración tangencial y normal en función del vector velocidad y del vector aceleración:



Se tiene:

$|\vec{a}_t|=|\vec{a}|.\cos\theta,$ $|\vec{a}_n|=|\vec{a}|.sen\theta$

Y los productos vectorial y escalar entre los vectores velocidad y aceleración muestran:

$|\vec{a}\wedge\vec{v}|=|\vec{a}|.|\vec{v}|.sen\theta$ $|\vec{a}.\vec{v}|=|\vec{a}|.|\vec{v}|.\cos\theta$

o sea:

$$|\vec{a} \wedge \vec{v}| = |\vec{a}_n|.|\vec{v}| \qquad |\vec{a}.\vec{v}| = |\vec{a}_t|.|\vec{v}|$$

Por tanto, se tiene:

$$|\vec{a}_n| = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad |\vec{a}_t| = \frac{|\vec{a}.\vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad [1]$$

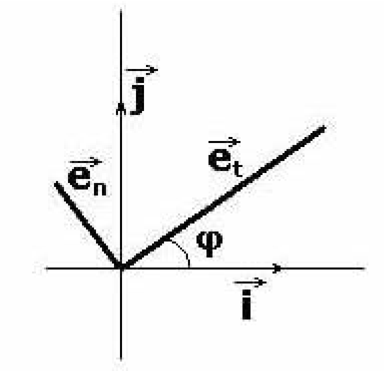
Radio de curvatura:

$$\left.\begin{aligned} |\vec{a}_n| &= \frac{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} \\ |\vec{a}_n| &= \frac{|.\vec{v}|^2}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|.\vec{v}|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{a} \wedge \vec{v}|} \qquad [2]$$

4. Paso a una expresión cartesiana:

Desde la expresión intrínseca del vector velocidad y del vector aceleración puede pasarse a una expresión cartesiana, en un sistema de referencia cartesiano con dos de sus ejes contenidos en el plano osculador, plano en el que, como sabemos, se encuentran contenidos tanto el vector velocidad (en la dirección del versor tangente) como el vector aceleración (expresado en las dos direcciones del plano osculador, versores tangente y normal):

Consideremos, pues, en el plano osculador el sistema de referencia $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ y la expresión de los versores tangente y normal en dicho sistema:



Se tienen las siguientes expresiones de los versores tangente y normal en función del angulo φ:

$$\vec{e}_t = \cos\varphi.\vec{i} + sen\varphi.\vec{j}$$
$$\vec{e}_n = -sen\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

Por lo que al sustituir en las expresiones intrínsecas de los vectores velocidad y aceleración, se tiene:

$$\vec{v}(t) = \dot{s}.\vec{e}_t = \dot{s}.(\cos\varphi.\vec{i} + sen\varphi.\vec{j}) = \dot{s}.\cos\varphi.\vec{i} + \dot{s}.sen\varphi.\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}.\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{R}.\vec{e}_n = \ddot{s}.(\cos\varphi.\vec{i} + sen\varphi.\vec{j}) + \frac{\dot{s}^2}{R}(-sen\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}) =$$
$$= \left(\ddot{s}.\cos\varphi - \frac{\dot{s}^2}{R}sen\varphi\right)\vec{i} + \left(\ddot{s}.sn\varphi + \frac{\dot{s}^2}{R}\cos\varphi\right)\vec{j}$$

En definitiva:

$$\vec{v}(t) = \dot{s}.\cos\varphi.\vec{i} + \dot{s}.sen\varphi.\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{s}.\cos\varphi - \frac{\dot{s}^2}{R}sen\varphi\right)\vec{i} + \left(\ddot{s}.sen\varphi + \frac{\dot{s}^2}{R}\cos\varphi\right)\vec{j}$$

5. **Obtención de la expresión intrínseca desde una expresión cartesiana:**

Supongamos las expresiones de vector velocidad y del vector aceleración en un triedro exterior de la forma:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}, \qquad \vec{a}(t) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Podríamos obtener tanto la aceleración tangencial como normal, y también el radio de curvatura R, utilizando las expresiones [1] y [2] de la sección 3.

$$|\vec{a}_t| = \frac{|\vec{a}.\vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad |\vec{a}_n| = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}$$

Efectivamente:

Siendo

$$|\vec{a}.\vec{v}| = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3, \quad |\vec{a} \wedge \vec{v}| = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2}$$

$$|\vec{v}| = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}, \qquad |\vec{v}|^3 = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{3/2}$$

se tiene:

$$|\vec{a}_t| = \frac{|\vec{a}.\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3}{\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}}$$

$$|\vec{a}_n| = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2}}{\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}}$$

$$R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{a} \wedge \vec{v}|} = \frac{\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{3/2}}{\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2}}$$

6. Documentación:

ALONSO Marcelo-FINN, Eduard J., Física, Vol I (Mecánica). Ed Fondo Educativo Interamericano, 1970, Panamá.

LANDAU, Lev-Lifshitz, E., Mecánica (Vol I del curso de Física Teórica). Ed. Mir Moscú, 1979

FINZI, Bruno, Mecánica Racional, Vol I. , Urmo, S.A. de Ediciones, 1976