CONCEPTOS DE RELATIVIDAD ESPECIAL Y GENERAL

Ing.Ezequiel López M.

25 de Octubre de 2002

1. Sistemas uniformemente acelerados

La relatividad especial se puede utilizar para describir los eventos tal como son vistos por un observador en un marco de referencia acelerado. Para este propósito se considera que el sistema S se mueve con una partícula de masa m_0 a lo largo del eje x positivo del sistema S'. La partícula se somete a una fuerza $F = m_0 g$ en dirección del eje x. La ecuación de movimiento para dicha partícula será

$$\begin{aligned} \frac{dp_{x'}}{dt'} &= m_0 g \\ \frac{d}{d\tau'}\left(\gamma m_0 \beta\right) &= m_0 \frac{g}{c^2} \\ d\left(\gamma\beta\right) &= \frac{g}{c^2} d\tau' \end{aligned} \tag{1}$$

en donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\tau' = ct'$ y $\beta = v/c$ corresponde a la velocidad instantánea entre S y S'. La última de las ecs. (1) se puede integrar directamente. En el primer miembro la variable es la velocidad β, la cual se valúa desde cero hasta un valor β. En el segundo miembro la variable τ' se valúa, de igual manera, desde cero a un tiempo τ'. Con esto se llega a que (1)

$$\begin{aligned} \gamma\beta &= \frac{g}{c^2}\tau' \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{g}{c^2}\tau' \end{aligned} \tag{2}$$

$$\beta = \frac{\kappa\tau'}{\sqrt{(\kappa\tau')^2 + 1}}$$

Sustituyendo $\beta = dx/d\tau'$ en la ecuación anterior e integrando sobre x' desde una posición x_0 hasta x' y sobre el tiempo desde cero hasta τ' se obtiene

$$\kappa x' - \kappa x'_0 = \sqrt{1 + (\kappa\tau')^2} - 1 \tag{3}$$

lo cual se puede escribir como

$$\kappa x' = \sqrt{1 + (\kappa\tau')^2} + \kappa x'_p \tag{4}$$

donde $\kappa x'_p = \kappa x'_0 - 1$ y $\kappa = g/c^2$. La ecuación anterior expresa la posición de la partícula como función del tiempo en el sistema S' . De las ecs. (1) y (4) se puede deducir que las ecuaciones de transformación entre un sistema acelerado y un sistema inercial son

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{\kappa} + \left(x + \frac{1}{\kappa}\right) cosh\kappa\tau \\ \tau' &= (x + 1/\kappa)\sinh \kappa\tau \end{aligned} \tag{5}$$

De estas ecuaciones se puede obtener el tensor métrico para el sistema acelerado, el cual es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+\kappa x)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

con esto, la métrica se escribe de la forma

$$ds^2 = -(1 + \kappa x)^2 d\tau^2 + dx^2 \tag{7}$$

Es importante observar algunos hechos implícitos en esta métrica. Por ejemplo, si $ds^2 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} dx^2 &= (1 + \kappa x)^2 d\tau^2 \\ \beta &= 1 + \kappa x \end{aligned} \tag{8}$$

es decir, que la velocidad de la luz depende ahora de la posición. Es más, cuando $x = -1/\kappa$, se tiene que $\beta = 0$. El evento en $x = -1/\kappa$ nunca será observado porque la luz nunca escapa de allí, justo como en la superficie de un agujero negro. Estos hechos parecen contradecir los principios de la relatividad especial pero en realidad no es así, puesto que estos principios se aplican a observadores en marcos de refencia inercial. Las consecuencias de la ec.(8) serán verificadas para un observador en un marco acelerado, para el cuál, los principios de la relatividad especial ya no son válidos.

2. Gravedad y relatividad especial

En el desarrollo de la relatividad especial no se asume la presencia de campos gravitacionales. Existen problemas al tratar de introducir la gravedad en las ecuaciones de la relatividad especial. Por ejemplo, la formulación newtoniana de la gravedad sostiene que

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \tag{9}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{10}$$

En la forma en que están, estas ecuaciones no pueden ser introducidas en la relatividad especial. La ec.(9) está en forma tridimensional y tendría que ser modificada a una forma cuadridimensional $d^2x^\mu/d\tau^2$. La ec.(10) no es un invariante de Lorentz, ya que aparece el operador tridimensional laplaciano en lugar del operador cuadridimensional dÁlembertiano. Esto significa que el potencial Φ responde instantáneamente a cambios en la densidad ρ a largas distancias, es decir, que el campo newtoniano se propaga con velocidad infinita. Se ha intentado corregir estos problemas proponiendo que el potencial gravitacional sea un escalar, luego un vector y por último, un tensor simétrico. A pesar de esto, las teorías desarrolladas tienen limitaciones y no concuerdan con las observaciones experimentales. La mejor de las tres es la del tensor simétrico, aunque internamente es inconsistente y no admite soluciones exactas. Estas dificultades han sido estudiadas por Feynman, Weinberg y Deser entre otros. Ellos muestran cómo la teoría del tensor en espacio-tiempo plano puede ser modificada usando la teoría de campos relativista. Al seguir este camino ellos consiguen eliminar la inconsistencias, llegando a la teoría de la relatividad general de Einstein. Lo anterior implica que no se puede formular una teoría de la gravitación en un espacio-tiempo plano y que ésta misma es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Para poder describir las propiedades de los espacios curvados, Einstein introdujo en la física los conceptos matemáticos desarrollados por Riemann, los cuales se describen a continuación.

3. Tensores

Se tiene un sistema de coordenadas primado y uno no primado, tal que $x^i = x^i(x^{i'})$; la cual es una función real, univaluada y sus derivadas existen.

En forma diferencial las ecuaciones son

$$dx^i = a^i_{i'} dx^{i'} \quad y \quad dx^{i'} = a^{i'}_i dx^i \tag{11}$$

donde

$$a^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad y \quad a^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \tag{12}$$

$a^i_{i'}$ y $a^{i'}_i$ son los coeficientes de transformación y cumplen con la propiedad $a^i_{i'} a^{i'}_j = \delta^i_j$. Un sistema de coordenadas es una manera de identificar puntos en el espacio. Su propósito es nombrar puntos, el de la métrica es conectarlos geométricamente. En el caso de un espacio plano, la distancia entre dos puntos (x^1, y^1) y (x^2, y^2) la distancia es $\left[(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2\right]^{1/2}$; así, el espacio tiene asignada una métrica. La métrica puede ser asignada diferencialmente mediante g_{ij} , el tensor métrico. Si en un sistema de coordenadas el tensor métrico es $g_{i'j'}$ se cumple que $ds^2 = g_{i'j'} dx^{i'} dy^{j'}$ El tensor métrico se puede transformar con ayuda de la ec.12. Al hacer esto resulta que

$$ds^2 = g_{i'j'} a^{i'}_i dx^i a^{j'}_j dx^j$$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{13}$$

es decir

$$g_{ij} = a^{i'}_i a^{j'}_j g_{i'j'} \tag{14}$$

En forma general, un tensor se tranforma de esta manera. Si una cantidad dada se transforma de acuerdo a la ec.14, entonces esa cantidad es un tensor. Este tipo de transformaciones se conoce como transformaciones lineales. La ec.13 puede escribirse as:

$$ds^2 = dx_i dx^i \tag{15}$$

donde $dx_i = g_{ij} dx^j$ De esta manera se dice que dx^i es un intervalo *contravariante* y dx_i es un intervalo *covariante* . Se puede observar que mediante el tensor métrico es posible subir o bajar (como en este caso) los índices de un vector o un tensor.

4. Smbolos de Christoffel

Un vector se desplaza paralelamente cuando no se cambia su magnitud ni dirección. Cuando se desplaza paralelamente un vector en coordenadas cartesianas, las componentes de los vectores permanecen sin cambio alguno. En algunos sistemas de coordenadas esto no es así y al mover un vector paralelamente, de un punto a otro, sus componentes cambian. El símbolo de Christoffel Γ^k_{ij} se define para facilitar la descripción de los desplazamientos paralelos. Si un vectorA^i es paralelamente desplazado sobre un intervalo δ^j el cambio en sus componentes A^k está determinado por el símbolo de Christoffel:

$$\delta A^k = -\Gamma^k_{ij} A^i \delta x^j \tag{16}$$

En forma general, los símbolos de Christoffel se pueden obtener del tensor métrico, de tal forma que

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(g_{js,i} + g_{si,j} - g_{ij,s} \right) \tag{17}$$

donde $g_{ij,s} = \partial g_{ij} / \partial x^s$. La ec.16 expresa el cambio en las componentes de un vector contravariante al ser desplazado paralelamente. Una expresión similar se puede encontrar para el caso en que el vector sea covariante. Considerando el hecho que el producto interior de dos vectores es un invariante, se puede decir que

$$\delta \left(A_i B^i \right) = 0 = A_k \delta B^k + B^i \delta A_i \tag{18}$$

sustituyendo δB^k de la ec.16 y despejando δA_i se obtiene que

$$\delta A_i = \Gamma^k_{ij} A_k \delta x^j \tag{19}$$

Es importante observar que δA^k y δA_k no son vectores debido a que Γ no es un tensor. En coordenadas cartesianas δA^k es igual a cero pero no lo es en coordenadas polares. Un vector que es cero en un sistema de coordenadas no puede ser diferente de cero en otro sistema. El mismo argumento se aplica a los símbolos de Christoffel. En un sistema cartesiano éstos son iguales a cero, pero no lo son en coodenadas polares.

5. Derivada covariante

Se considera que $A^i = a^i_{i'} A^{i'}$. Tomando la derivada ordinaria se tiene

$$dA^i = d(a^i_{i'})A^{i'} + a^i_{i'} dA^{i'} \tag{20}$$

si las componentes no cambian, entonces $dA^{i'} = 0$ y dA^i es debido sólo al desplazamiento paralelo; por lo tanto $d(a^i_{i'})A^{i'} = \delta A^i$.Entonces,

$$a^i_{i'} dA^{i'} = dA^i - \delta A^i$$

$$dA^{i'} = a^{i'}_i (dA^i - \delta A^i) \tag{21}$$

para un sistema estrellado, $dA^{i'} = a^{i'}_{i^*}(dA^{i^*} - \delta A^{i^*})$ que al igualarlos da

$$a^{i'}_i (dA^i - \delta A^i) = a^{i'}_{i^*}(dA^{i^*} - \delta A^{i^*})$$

$$a^j_{i'} a^{i'}_i (dA^i - \delta A^i) = a^j_{i'} a^{i'}_{i^*}(dA^{i^*} - \delta A^{i^*})$$

$$(dA^i - \delta A^i) = a^j_{i^*}(dA^{i^*} - \delta A^{i^*}) \tag{22}$$

de esta última ecuación, se ve que la magnitud entre paréntesis se transforma como un vector, por lo tanto es un vector, designado como

$$DA^i = (dA^i - \delta A^i) \tag{23}$$

Esta diferencia da el cambio en el vector debido a las características curvilíneas del sistema de coordenadas, dejando el cambio real en el vector. La ec.23 se puede escribir como

$$DA^i = \left(\frac{dA^i}{dx^j} + \Gamma^i_{jk} A^k \right) dx^j \tag{24}$$

la cantidad entre paréntesis es un tensor mixto llamado derivada covariante. La ec.24 puede escribirse de la forma siguiente

$$A^i_{;j} = A^i_{,j} + \Gamma^i_{jk} A^k \tag{25}$$

donde el punto y coma representa la derivada covariante. De la misma forma, para un vector covariante se tiene

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma^k_{ij} A_k \tag{26}$$

Todos los conceptos anteriores se pueden generalizar fácilmente para la geometría del espacio-tiempo, simplemente haciendo las sumatorias sobre cuatro dimensiones.

6. Tensor de Riemann, tensor de Ricci y escalar de curvatura

El tensor de Riemann se obtiene de la siguiente expresión

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu] A_\beta \equiv R^\alpha_{\beta\mu\nu} A_\alpha \tag{27}$$

donde ∇_ν es la derivada covariante respecto de x^ν y $[\nabla_\nu, \nabla_\mu] = \nabla_\nu\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\nu$. El tensor de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ se puede interpretar como una medida de la no conmutatividad de la derivada covariante. Este tensor puede ser obtenido a partir de los símbolos de Christoffel y sus derivadas

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta}\Gamma^\mu_{\beta\gamma} \tag{28}$$

Al bajar el índice contravariante del tensor de Riemann se obtiene el tensor de curvatura, dado como

$$R_{\sigma\beta\gamma\delta} = g_{\sigma\alpha} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \tag{29}$$

El tensor de Riemann tiene 256 componentes pero no todas son independientes debido a las simetrías que presenta este tensor. Algunas de ellas son $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}$ y $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = 0$. El tensor de Ricci de encuentra contrayendo en tensor de Riemann de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \tag{30}$$

La elección del índice covariante a contraer no es fija. En este trabajo se toma la definición dada en la ecuación anterior. Otra forma de expresar la curvatura del espacio-tiempo es mediante el escalar de curvatura, que es

$$R = R^\alpha_\alpha = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{31}$$

en donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico contravariante y satisface la relación $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$.

7. Identidades de Bianchi

En principio, Einstein supuso que el tensor de Ricci se debía igualar al tensor de materia; de esta manera la materia sería la fuente de la gravedad.

Esto no funcionó ya que la divergencia del tensor de materia se hace cero y la del tensor de Ricci no siempre lo es. Para encontrar un tensor que cumpliera con la condición anterior se recurre a las *identidades de Bianchi*, que son satisfechas por la derivada covariante del tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\tau} + R_{\mu\nu\sigma\tau;\rho} + R_{\mu\nu\tau\rho;\sigma} = 0 \tag{32}$$

Estas identidades forman un conjunto de 1024 ecuaciones de la cuales la mayoría no dice nada. Esencialmente son 24 identidades que no son triviales. Multiplicando la ec.32 por $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$ y usando la difinición del tensor de Ricci y de escalar de curvatura, junto con las propiedades de simetría del tensor de Riemann se llega a que

$$R_{;\tau} - R^{\mu}_{\tau;\mu} - R^{\nu}_{\tau;\nu} = 0$$

$$(Rg^{\nu}_{\tau} - 2R^{\nu}_{\tau})_{;\nu} = 0 \tag{33}$$

lo cual define el *tensor de Einstein* $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$. Por igualdad, este tensor satisface la condición de divergencia $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

8. Tensor de momentum y energía

El postulado de Einstein para el espacio vacío establece que

$$R^{\mu\nu} = 0 \tag{34}$$

esta ecuación describe el campo gravitacional en ausencia de materia. Para poder considerar la fuente del campo gravitacional es necesario incluir a la materia en las ecuaciones. En electrostática, se cumple la ecuación de Laplace para el campo eléctrico en el vacío, esto es $\nabla^2\phi = 0$. Cuando se considera una distribución de carga la ecuación de Laplace se convierte en la ecuación de Poisson,$\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0$. Además, la carga cumple con la ecuación de continuidad dada por

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.j = 0 \tag{35}$$

la cual expresa la conservación de la carga. Para introducir la materia en la ec.34, se utiliza la identidad de Bianchi dada por la ec.32, de la cual se obtiene el tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$. Por analogía con la electrostática, se postula que

$$G^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu} \tag{36}$$

donde χ es una constante y $T^{\mu\nu}$ es el *tensor de momentum y energía*. En la sección anterior se vio que el tensor de Einstein cumple que $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ por lo tanto, el tensor de *momentum* y energía también cumple la misma propiedad, es decir,

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{37}$$

esta ecuación es el análogo a la ecuación de continuidad 35. Es importante notar que la ec.37 no se hubiera obtenido de la ec.34 y es consecuencia de la ec.32. Si en la ec.36 se hace que la constante de proporcionalidad sea igual a $8\pi G$, donde G es la constante de gravitación universal; se obtiene

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \tag{38}$$

esta es la forma más general de la ecuación de campo de Einstein y muestra la relación entre la materia y la curvatura del espacio-tiempo. Otra forma alternativa de escribir la ec.38 y que involucre al tensor de Ricci es

$$R^{\mu\nu} = 8\pi G \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \tag{39}$$

donde T es la traza del tensor de energía *momentum* y es igual a $T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$.

Referencias

1. Charles Misner, Gravitation. (USA: Editorial Freeman and Company, 1973).
2. Robert Resnik, Introduccin a la teora de la relatividad especial
3. Herbert Goldstein, Classical mechanics (2a. ed. USA: Editorial Addison-Wesley, 1980).
4. David C. Kay, Tensor Calculus (Schaums Outline 1988 the McGraw-Hill)