UNA INTRODUCCIÓN A LA

LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

Fué desde antecedentes históricos, tales como la imposibilidad de matener invariantes a las Ecuaciones de Maxwell del Campo Electromagnético, mediante la transformación de Galileo para la Mecánica, o el asombroso resultado del experimento de Michelson-Morley por el que la velocidad de la luz parecía no depender del foco ni del observador, lo que llevaron a Alberto Einstein a analizar, de manera profunda, el concepto de tiempo y el de simultaneidad de sucesos en el espacio-tiempo. Le llevaron, en definitiva, a plantearse otros principios para el desarrollo de la Física.

-----

1. Los Postulados de Einstein:

Fueron dos los postulados que enunció Einstein a la vista de lo acontecido en las postrimerias del siglo XIX, enunciados basados en evidencias experimentales, por una parte, y justificables mediante gran número de ejemplos teóricos, por otra.

1.1. Enunciados:

1º. El Principio de Relatividad. ***Las leyes de todos los fenómenos físicos tienen la misma expresión en los sistemas entre sí inerciales.***

En realidad, este Principio es la generalización a toda la Física del Principio de Relatividad de Galileo para la Mecánica. Afirma la imposibilidad de detectar el movimiento uniforme de un sistema, mediante la realización en su interior de cualesquiera experimentos físicos.

2º. Independencia de la velocidad de la luz. ***La velocidad de la luz en el vacío es independiente de la velocidad del foco y del observador.***

Este Principio podemos extenderlo a fotones, a partículas cuya masa en reposo es nula, etc.. Implica una composición de velocidades que, realmente, resulta extraña a nuestro sentido común.

1.2. Evidencias experimentales:

Aparte de la prueba clásica del experimento de Michelson-Morley, se pueden considerar otras evidencias justificadoras de los dos postulados. Señalemos algunas:

1) Las mediciones de De Sitter (Willem De Sitter, 1872-1934) y otros astrofísicos de la velocidad de radiación proveniente de estrellas dobles, unidas gravitacionalmente. Según estas mediciones, la velocidad de la radiación es la misma, mientras que las velocidades de las estrellas alrededor del centro de masas del sistema binario resultan ser distintas, al medirlas mediante el Efecto Doppler-Fizeau.

2) La aniquilación de paquetes de positrones rápidos al chocar con electrones en reposo da lugar a fotones, todos con igual velocidad, independiente de un sentido de propagación del paquete de positrones.

3) La desintegración de mesones neutros producidos en aceleradores, a velocidades próximas a la de la luz, da siempre lugar a fotones que se desplazan en todas direcciones, a igual velocidad, siempre independiente de la velocidad extraordinariamente alta, de los mesones que se desintegran.

2. Simultaneidad y sincronización:

2.1. Simultaneidad:

Cuando dos sucesos, A y B, remotos, son medidos como simultáneos mediante un reloj R1 situado en un sistema de referencia K es porque la luz procedente de uno y del otro suceso ha llegado al mismo tiempo al reloj R1. Naturalmente, si consideramos ahora la existencia de otro reloj R2 que esté, por ejemplo, mucho más próximo que R1 a uno de los dos sucesos, por ejemplo a A, esto quiere decir que la luz procedente de ambos sucesos ya no llega al mismo tiempo al reloj R2, es decir, para un observador del reloj R2, tales sucesos no son simultáneos. Llegará a R2 la luz de A antes que la luz de B.

Nos encontramos, en definitiva, que sucesos que son simultáneos en un reloj R1 pueden no serlo en otro reloj R2, tanto si ambos están en reposo relativo o con movimiento uniforme uno respecto del otro.

La pregunta primera que nos hacemos es si sería posible establecer algún criterio de medición del tiempo en un conjunto de relojes de modo que lo que fuera simultáneo para uno de ellos también lo fuera para los restantes relojes del sistema.

El problema de la simultaneidad es crucial para entender la Teoría de la Relatividad Restringida. ¿Cuándo dos sucesos son simultáneos?. ¿Cómo saberlo?.

Para poder hacer esta medición común es necesario sincronizar los relojes, pero ¿cuál es el criterio válido de sincronización?

2.2. Sincronización:

El criterio de sincronización de Einstein para un conjunto Rs de relojes consiste en establecer una relación de equivalencia en el conjunto del modo siguiente

> ”El reloj R1 está sincronizado con el reloj R2 si para una señal que partiendo del primero, R1, en el instante ta, se refleja en el segundo, R2, y regresa al reloj R1 en el instante tb, se verifica que el tiempo medido en el reloj R2 en el momento de recibir la señal procedente de R1 es (ta + tb) / 2”

Es inmediato que se trata de una relación reflexiva, simétrica y también transitiva. Es, por tanto, de equivalencia.

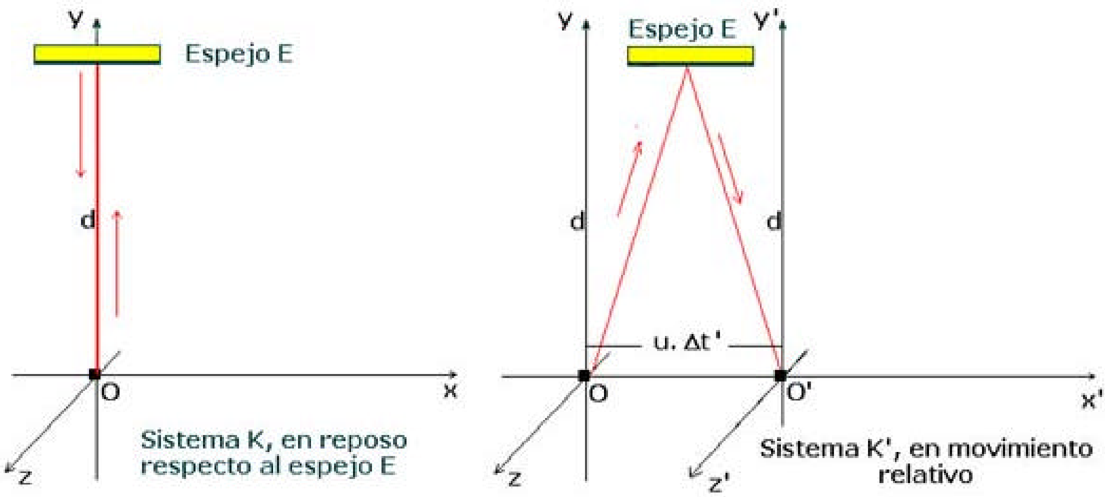
Se dice que el intervalo temporal entre dos sucesos S1 y S2 es “propio” si para medirlo basta un solo reloj solidario al sistema de referencia desde el cual se mide. El intervalo temporal se dirá “impropio” si necesita dos relojes sincronizados para realizar la medición solidarios al sistema desde donde esta medición se realiza.

3. Dilatación del tiempo y contracción de las distancias:

3.1. Dilatación del tiempo:

Supongamos dos sistemas K y K', de orígenes respectivos en los puntos O y O', de modo que exista un movimiento relativo entre ambos de velocidad (u, 0, 0).

Supongamos que en el instante inicial del movimiento, es decir, cuando ambos orígenes O y O' coinciden, lanzamos una señal para que se refleje en un espejo. Veamos la situación desde uno y otro sistema.



Si consideramos que en el sistema K lanzamos la señal para que se refleje en un punto, un espejo, solidario a K, a una distancia *d*, y regrese al mismo punto de donde partió, el intervalo propio medido será:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2d}{c}$$

Si, por otra parte, el sistema K' se ha movido mientras tanto con respecto a K, se tendrá, para el intervalo impropio, medido en K', que el instante inicial es el mismo, pues ambos orígenes coincidían al emitirse la señal, pero el momento de llegada se recoge ahora en un reloj solidario al sistema K', a una distancia $u.\Delta t'$, del punto de partida:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2.\sqrt{d^2 + \left(\frac{u.\Delta t'}{2}\right)^2}}{c}$$

Podemos hacer la comparación de ambos intervalos, el propio, medido en un reloj solidario al sistema de los sucesos, y el impropio, medido en el sistema en movimiento relativo. Para ello, despejamos en la última expresión:

$$(c.\Delta t')^2 = 4.\left(d^2 + \left(\frac{u.\Delta t'}{2}\right)^2\right) \rightarrow (c.\Delta t')^2 - (u.\Delta t')^2 = 4.d^2$$

y, por tanto:

$$(c^2 - u^2).\Delta t'^2 = 4.d^2 \rightarrow \Delta t' = \frac{2.d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c.\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{2d/c}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$ E

n definitiva, se tiene la relación:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Dicho de otro modo:

$$Intervalo\_impropio = \frac{Intervalo\_propio}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Esto quiere decir que el intervalo impropio, medido en un sistema en movimiento relativo con respecto al sistema solidario a los sucesos, es mayor que el intervalo propio, medido en el mismo sistema en el que se verifican los sucesos con relojes en reposo, por tanto, sincronizados entre sí.

Dicho de otro modo, si en un sistema en reposo ocurren dos sucesos, el intervalo de tiempo entre ambos medido en un sistema en reposo respecto a dichos sucesos es menor que el intervalo de tiempo entre ambos medido en un sistema en movimiento respecto de ellos. Cuando medidos desde un sistema en movimiento el tiempo se dilata.

Si, por ejemplo, medimos acontecimientos en la Tierra desde una nave en movimiento exterior, puede ocurrir que un acontecimiento que para nosotros en la Tierra dura un mes, para los viajeros de la nave dure 3 meses. O también, Si un viajero de la nave envejece un año, para nuestra medición desde la Tierra de los acontecimientos solidarios a la nave dicho viajero podría haber envejecido 5 años, por ejemplo.

3.2. Contracción de las distancias:

Supongamos dos sistemas, K y K', en movimiento uniforme, de velocidad relativa (u, 0, 0), y orígenes respectivos O y O'.

Si consideramos dos puntos, A y B del sistema K, podemos medir el tiempo que tarda el origen del sistema K' en pasar primero por el punto A y después por el punto B.

Si los instantes los medimos desde el sistema en reposo K, necesitaremos dos relojes sincronizados, uno en cada punto, para medir los instantes ta y tb del paso del sistema K' por ambos puntos, intervalo, pues, impropio. Encontramos entonces que, la longitud *L* entre ambos puntos es inmediata:

$$\Delta t = t_b - t_a, \quad L = u.\Delta t$$

Si los instantes los medimos ahora desde el sistema en movimiento K', bastará con un solo reloj solidario al origen de K' para medir el instante en que pasa por el punto A y después el instante en que pasa por el punto B. Se trata, pues, de un intervalo temporal propio. La longitud entre ambos puntos, medida en el sistema K' es, también, inmediata:

$$\Delta t' = t_b^{'} - t_a^{'}, \quad L' = u.\Delta t^{'}$$

Si tenemos en cuenta la relación entre el intervalo temporal propio y el intervalo temporal impropio entre sucesos, se tiene que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \rightarrow \Delta t' = \Delta t..\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{L}{u}..\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

Por tanto:

$$L' = u.\Delta t' = L..\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

Esto quiere decir, que la distancia entre dos puntos A y B del sistema K medida desde un sistema en movimiento relativo K' es menor que si se mide desde el propio K.

Es decir, al medir distancias en un sistema desde otro sistema en movimiento las distancias parecen ser mas cortas, las distancias se contraen. Una distancia de 1000 kilómetros entre dos puntos de la Tierra, medida por nosotros aquí, podría ser de solo 200 kilómetros medida por un viajero en una nave en movimiento respecto de la Tierra, dependiendo, claro está, de la velocidad de la nave.

4. La transformación de Lorentz:

4.1. Obtención física:

Las fórmulas a obtener serían las expresiones de las coordenadas y del tiempo de un suceso, medidas en un sistema K' en movimiento rectilíneo y uniforme (x', y', z', t'), en función de las coordenadas y del tiempo del mismo suceso medidas en un sistema K en reposo con respecto al suceso.

Si consideramos paralelos los ejes coordenados de ambos sistemas K y K', y el movimiento del sistema K' se realiza a lo largo de la dirección del eje x, las fórmulas de transformación serán del tipo:

$$x' = f(x),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = g(t)$$

Veamos, entonces, como obtenerlas. Sea Dt la variación de tiempo entre dos sucesos solidarios al sistema K (tiempo propio), y sea Dt' la variación de tiempo medida desde el sistema K' en movimiento relativo:

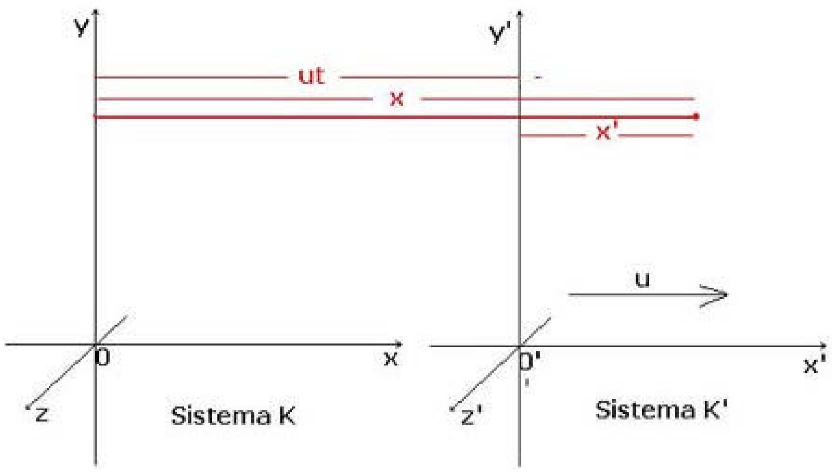
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \rightarrow \Delta t = \Delta t'\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{\Delta t'\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta t' - u\Delta t'.\frac{u}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\Delta t' - \frac{u}{c^2}.x'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t' - \frac{u}{c^2}.x'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \rightarrow t - 0 = \frac{t' - 0 - \frac{u}{c^2}.x'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{t' - \frac{u}{c^2}.x'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

En definidas cuentas se tiene:

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}.x}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Para ver la relación entre las coordenadas espaciales x y x', consideremos la siguiente figura



si el sistema K' se desplaza con respecto al sistema k con una velocidad u (lo que es lo mismo que afirmar que el sistema k se desplaza con respecto a K' a una velocidad –u), se tiene, en definitiva, que una distancia x' medida en el sistema K', sería medida desde el sistema K como

$$x'.\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

asimismo, esa distancia, representada en la figura, para un observador situado en el sistema K se calcularía por x – ut, por tanto, se tiene que es

$$x-ut=x'.\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

Y, finalmente $$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Si llamamos $$f=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

la transformación de Lorentz encontrada se puede expresar por

$$\begin{aligned} x' &= f\,(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= f\,(t-\frac{u}{c^2}.x) \end{aligned}$$

diferenciando y dividiendo, podemos obtener la transformación de Lorentz para las velocidades:

$$\begin{cases} dx' = f\left(dx-udt\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = f\left(dt-\frac{u}{c^2}.dx\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx-u.dt}{dt-\frac{u}{c^2}dx} = \dfrac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}.v_x} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{f\left(dt-\frac{u}{c^2}.dy\right)} = \dfrac{v_y\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{1-\frac{u}{c^2}.v_y} \\ {}'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{f\left(dt-\frac{u}{c^2}.dz\right)} \quad \dfrac{v_z\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{1-\frac{u}{c^2}.v_z} \end{cases}$$

Cambiando *u* por –*u* se obtienen las fórmulas inversas:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx+u.dt}{dt+\dfrac{u}{c^2}dx} = \dfrac{v'_x+u}{1+\dfrac{u}{c^2}.v'_x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{f\left(dt+\dfrac{u}{c^2}.dy\right)} = \dfrac{v'_y\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}{1+\dfrac{u}{c^2}.v'_y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{f\left(dt+\dfrac{u}{c^2}.dz\right)} \quad \dfrac{v'_z\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}{1+\dfrac{u}{c^2}.v'_z} \end{cases}$$

Las fórmulas anteriores, que describen la transformación de Lorentz para las componentes de velocidad, encontraron evidencias experimentales en los trabajos de medición que habían sido realizados por Fizeau (Armand H.L. Fizeau, 1819-1896) a mediados del siglo XIX, y, posteriormente, en las mediciones realizadas por otros investigadores. Se ha medido, concretamente, la velocidad de la luz en el interior de un fluido móvil (sistema K'), con índice de refracción dado por *n*, propagándose con velocidad $v'_x = c/n$, con velocidad *u* para el fluido, verificándose estas fórmulas con gran exactitud.

En el caso particular del vacío, que tiene índice de refracción n = 1, se tendría que

$$v'_x = \frac{c}{n} = c, \quad v_x = \frac{c+u}{1+\dfrac{u.c}{c^2}} = \frac{c+c}{1+\dfrac{c^2}{c^2}} = c$$

Resultando la misma medida para la velocidad de la luz desde el sistema K fijo que desde el sistema K' móvil.

4.2. Expresión matricial en el espacio de Minkowsky:

El espacio de Minkowsy (Hermann Minkowsky, 1864 -1909), es un espacio pseudoeuclídeo que resultó ser muy adecuado para la realización de los cálculos que implicaban las fórmulas de transformación de Lorentz.

La idea básica es llamar "Punto de Universo", o suceso del espacio de Minkowsky a un suceso que ocurre en el punto espacial (x, y, z) y en el tiempo t. En el espacio de Minkowsky se representará con cuatro coordenadas, (x_1, x_2, x_3, x_4), donde son x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = i.c.t, siendo i la unidad imaginaria de los números complejos.

Si consideramos las fórmulas de Lorentz:

$$x' = f(x - ut)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = f(t - \frac{u}{c^2}.x)$$

Se tiene que, en la notación de Minkowsky, serían, llamando $b = {}^{u}\!/\!_{c}$ **:**

$$x' = f(x - ut) \rightarrow x' = fx - fut = f.x - f.u\frac{ict}{ic} = f.x + if.\frac{u}{c}.ict = f.x_1 + ifbx_4$$
$$y' = y = x_2$$
$$z' = z = x_3$$
$$t' = f(t - \frac{u}{c^2}.x) \rightarrow t' = f.t - f.\frac{1}{c}b.x \rightarrow ict' = f.ict - ic.\frac{1}{c}.fb.x = -i.bf.x_1 + f.x_4$$

O sea:

$$x_1^{'} = f.x_1 + ifbx_4$$
$$x_2^{'} = x_2$$
$$x_3^{'} = x_3$$
$$x_4^{'} = -i.bf.x_1 + f.x_4$$

Que, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \\ x_4^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & ifb \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -ibf & 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

4.3. Carácter rotacional de la transformación:

Si hacemos $ib = tg\,j$ **se tiene que es** $-b^2 = tg^2 j$ **, .**

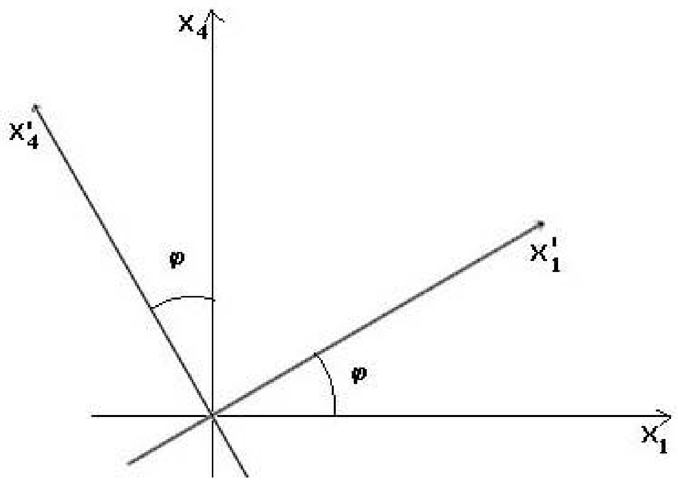
Por tanto, será:

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 j}} = \cos j$$
$$ibf = tg\,j.\cos j = sen\,j$$

Con lo cual, la ecuación matricial resulta expresable así:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos j & 0 & 0 & sen\, j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sen\, j & 0 & 0 & \cos j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

En definitiva, se trata de la matriz de un giro o rotación en el plano (x_1, x_4).



siendo $j = arctg \dfrac{iu}{c}$ **un ángulo que depende de la velocidad relativa u entre ambos sistemas inerciales K y K'. Al ser una rotación, se conservan los módulos, por lo que resulta que es invariante en todos los sistemas inerciales la expresión**

$$|r|^2 = r.r = \sum_{j=1}^{4} x_j^2$$

4.4. Cuadrivectores:

Por analogía con las fórmulas de la transformación de Lorentz, podemos definir un cuadrivector como un conjunto de cuatro números (M_1, M_2, M_3, M_4) que, en una transformación entre dos sistemas inerciales K y K' se verifican las fórmulas:

$$\begin{cases} M_1' &= f(M_1 + ibM_4) \\ M_2' &= M_2 \\ M_3' &= M_3 \\ M_4' &= f(-ibM_1 + M_4) \end{cases}$$

donde es $b = \dfrac{u}{c}$ **y** $f = \sqrt{1 - b^2}$

4.5. El cuadrivector de D'Alembert:

El operador vectorial de D'Alambert, expresado en el sistema de referencia K es

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right)$$

y expresado en el sistema de referencia móvil K' es:

$$\nabla' = \left(f(\frac{\partial}{\partial x_1} + ib\frac{\partial}{\partial x_4}), \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, f(-ib\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}) \right)$$

por lo que resulta ser un cuadrivector, en el sentido definido en el párrafo anterior. Esto nos indica que su cuadrado es invariante en todos los sistemas inerciales de referencia:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

por lo que la velocidad de radiación en el vacío es igual en todos los sistemas inerciales.

5. Magnitudes:

5.1. La Invariancia del Intervalo:

Para dos sucesos infinitamente próximos del espacio-tiempo de Minkowsky

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad y \quad (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4)$$

la variación viene dada por el cuadrivector

$$dl = (dx_1, \quad dx_2, \quad dx_3, \quad dx_4) = (dx, \quad dy, \quad dz, \quad icdt)$$

El intervalo o arco entre ambos sucesos próximos se define como

$$ds^2 = -dl^2 = -\sum_{i=1}^{4} dx_i^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$$

que es, por consiguiente, invariante en todos los sistemas inerciales, es decir $ds'^2 = ds^2$.

Para dos sucesos o acontecimientos cualesquiera:

$$(x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4) \; y \; (x_1', \quad x_2', \quad x_3', \quad x_4'),$$

el intervalo es: $s_{12}^2 = -\sum_{i=1}^{4} (x_i' - x_i)^2 = c^2(t'-t)^2 - \left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)$

Pueden darse varias situaciones con respecto al intervalo entre dos acontecimientos o sucesos:

a) $s_{12}^2 > 0$ **:**

en este caso es $c^2(t'-t)^2 > \left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)$**, es decir, el espacio entre ambos sucesos es menor que el espacio que recorre la luz entre ambos instantes. Pudiera existir, según esto, un sistema móvil K' que tuviera su origen en el primer suceso en el instante t y luego llegara a tener su origen en el segundo suceso en el instante t', es decir, pudiera existir un sistema móvil K' en el que ambos sucesos ocurrieran en el mismo punto. En tiempos diferentes, claro. A estos intervalos se les llama *temporales.***

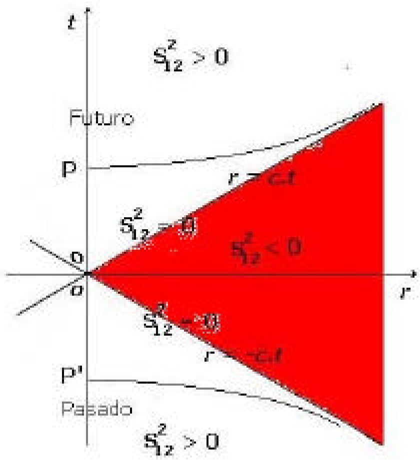
b) $s_{12}^2 = 0$

en este caso, ocurriría que $c^2(t'-t)^2 = \left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)$**, por lo que para que un sistema móvil K' pudiera estar en el primer suceso y luego en el segundo, tendría que moverse a la velocidad *c* de la luz.**

c) $s_{12}^2 < 0$

En este caso es $c^2(t'-t)^2 < \left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)$**, y el espacio es mayor que el que recorrería la luz en la diferencia de ambos tiempos. Es imposible que pueda existir un sistema móvil K' en el cual ambos sucesos puedan ocurrir en un mismo punto del mismo.**

Imaginemos, en este último caso, que el primer suceso ocurre ahora y aquí, en la Tierra, y el segundo suceso ocurre dentro de 15 minutos en el planeta Saturno. Para que un sistema móvil que tenga su origen ahora en el primer suceso y dentro de 15 minutos lo tenga en el segundo, debe viajar desde la Tierra hasta Saturno en solo 15 minutos, lo cual es imposible, pues la luz tarda más de una hora en hacer ese recorrido. Estos intervalos son los llamados *espaciales.*



En la figura se ha coloreado en rojo la zona en la que tienen lugar los sucesos de intervalos espaciales, es decir sucesos que no pueden ocurrir nunca en el mismo lugar, de ningún sistema de referencia.

Tanto en las zonas correspondientes al futuro, como al pasado (se han colocado sucesos P y P' respectivamente), los sucesos o acontecimientos se encuentran en la línea hiperbólica de ecuación

$$c^2 t^2 - r^2 = constante$$

(siendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$**)**

debido a la invariancia del intervalo. Las asíntotas de estas hipérbolas son las rectas de ecuaciones $r = \pm c.t$**.**

5.2. La cuadrivelocidad:

Si un sistema K' se desplaza con respecto a otro sistema K, el intervalo de tiempo medido entre dos puntos de la trayectoria de K' con respecto a K es propio si se mide desde el sistema K', Δt_p**, e impropio,** Δt_i**, si se mide desde el sistema K, verificándose, como sabemos de la página 5, que**

$$\Delta t_i = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

y, por otra parte sabemos que el cuadrivector de posición de K' con respecto de K es, medido desde del sistema K

$$\Delta r = \left(\Delta x_1, \quad \Delta x_2, \quad \Delta x_3, \quad ic\Delta t_i\right)$$

Se define el cuadrivector velocidad del sistema K' con respecto al sistema K como el cociente de dividir el desplazamiento medido en el sistema en reposo K, por el tiempo propio, medido en el sistema K'.

O sea:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt_i} = \left(\frac{dx_1}{dt_i\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \quad \frac{dx_2}{dt_i\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \quad \frac{dx_3}{dt_i\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \quad \frac{icdt_i}{dt_i\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left(\frac{dx_1}{dt_i}, \quad \frac{dx_2}{dt_i}, \quad \frac{dx_3}{dt_i}, \quad ic \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left(u_1, u_2, u_3, ic\right)$$

El módulo del vector cuadrivelocidad es:

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - c^2\right) = \frac{u^2 - c^2}{\frac{c^2 - u^2}{c^2}} = -c^2$$

5.5. Acción y Lagrangiana:

a) Acción:

Si asociamos a cada partícula o sistema de partículas p el escalar m_0, coeficiente de inercia medido en el sistema propio, solidario a la misma, podemos definir la Acción de la partícula en un intervalo de tiempo t_2 - t_1, por la integral:

$$S = -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} ds$$

donde es *ds* el intervalo infinitesimal.

Sustituyendo la expresión del intervalo:

$$S = -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2.dt^2 - dr^2} = -m_0.c\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.dt = -m_0.c\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - u^2}.dt =$$

$$= -m_0.c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}.dt$$

b) Lagrangiana:

La Lagrangiana de una partícula o sistema de partículas p en movimiento se puede definir a partir de la acción como la función L tal que

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L.dt$$

identificando con la expresión de la acción:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

5.4. Cuadrimpulso: Impulso y Energía:

Se llama cuadrimpulso al cuadrivector

$$\hat{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4}\right)$$

donde es L la lagrangiana, y son $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$ **, las componentes de la velocidad.**

El vector impulso se define como el vector de componentes las tres primera componentes del cuadrimpulso:

$$p = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right)$$

y siendo:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} \right) = \frac{m_0 \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}}, i = 1,2,3$$

por tanto:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}} (\dot{x}_1, \quad \dot{x}_2, \quad \dot{x}_4) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}} .u$$

y si llamamos $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}}$ **, se tendrá, finalmente, que** $p = m.u$

5.5. Energía:

La función de Hamilton o energía total de una partícula o sistema p, de masa *m₀* y velocidad *u,* se define por

$$E = u.\frac{\partial L}{\partial u} - L$$

por tanto:

$$E = u.\frac{\partial}{\partial u} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} \right) + m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} = u.\frac{m.u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2} =$$

$$= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}} + \frac{m_0 c^2 \left(1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}}$$

y si llamamos $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$ **, se tendrá, finalmente, que** $E = m.c^2$

la expresión de la lagrangiana sabemos que es, para un sistema cerrado en campo constante, expresable por la diferencia entre una función homogénea cuadrática *T* de la velocidad y una función *U* de las coordenadas:

$$L = T(\dot{x}_i) - U(x_i)$$

aplicando el teorema de Euler para las funciones homogéneas:

$$\dot{x}_i . \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{x}_i . \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 2T$$

por tanto:

$$E = u.\frac{\partial L}{\partial u} - L = 2T - (T - U) = T + U$$

Es decir, la energía total se descompone, en campos conservativos, aditivamente en dos partes, una parte que es una función cuadrática de la velocidad, es la *energía cinética T*, y la otra parte, que depende de la posición del sistema, es la *energía potencial U.*

$$m.c^2 = T + U$$

6. Bibliografía:

EINSTEIN, Albert. La teoria de la relativitat. Barcelona: Edicions Científiques Catalanes, 1990. (Biblioteca clàssics de la ciència) ISBN 84-86257-07-7
FINZI, Bruno, Mecánica Racional (Vol I, cap 9). Urmo, S. A. De Ediciones, 1976
LANDAU, L—LIFCHITZ, E., Física Teórica, (Vol I y Vol II). Ed Reverté, 1977
RINDLER, W.: Essential Relativity. Springer, New York, 1977.
VOROVIOV, I. I., La Teoría de la relatividad en problemas, Editorial Mir-Moscú, 1990

Carlos SÁNCHEZ CHINEA
casanchi@teleline.es