Algoritmo de Aproximación por Peso para el Cambio de Base de un Número

Alejandro José Raudales Banegas

Introducción
Cambiar un númeró de una base particular a otra deseada es un problema cuyo algoritmo es ampliamente difundido y conocido, por lo que hablar de un método alternativo para ello suele ser algo poco común. El presente documento trata específicamente sobre ello, enfoca primordialmente la conversión de un número escrito en base decimal que es pasado a una base "B" cualquiera. El algoritmo fue desarrollado por mi persona hace varios años y desde entonces ha sido mi deseo compartirlo con la comunidad científica, específicamente con los amantes de las matemáticas de los cuales esperaré sus consejos, aportes, comentarios y criticas que para mi tendrán mucha validez e importancia.

Comenzare el desarrollo de dicho problema ilustrando con un ejemplo la forma de emplear el algoritmo, explicando simultáneamente los pasos a seguir, continuando con unas líneas de programa para su implementación y concluyendo con la demostración formal del mismo y el estudio de una aplicación.

Ejemplo
Supongamos que se desea pasar el número 29 escrito en base decimal a su representación en base 3.

$$(29)_{10} \rightarrow (Y)_3$$

Podemos entonces escribir la igualdad:

$$\text{(E1)} \qquad a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 29$$

Todo expresados en términos de una base común (la decimal), entonces podemos observar que el problema se resume en encontrar los valore de n, m y de todos los coeficientes a_i (con i tomando valores desde –m hasta n).

Paso 1
En primer lugar hay que encontrar el valor de n, esto se hace con la siguiente formula

$$\text{(E2)} \qquad n := \operatorname{floor}\left(\frac{\log(C)}{\log(B)}\right) \qquad n = 3$$

Donde C es el numero escrito en base decimal (29 en nuestro ejemplo) y B es la nueva base (3 en nuestro caso) y “floor” se refiere a la función mayor entero ([x])
El resultado final de esta operación sería n=3 y la ecuación E2 quedaría como sigue:

(E3) $a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 29$

Paso 2
Procedemos a encontrar el coeficiente con mayor peso a_3 para lo que utilizamos la siguiente formula:

(E4) $a_i := \mathrm{floor}\left(\frac{C}{B^i}\right) \qquad i := n \qquad a_3 = 1$

Lo que en nuestro ejemplo da igual a 1, la ecuación E3 ahora quedaría:

(E5) $1 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 29$

Paso 3
Restamos el primer termino de la ecuación anterior en ambos lados del igual y obtenemos entonces:

(E6) $\left(1 \cdot 3^3 - 1 \cdot 3^3\right) + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 29 - 1 \cdot 3^3$

(E7) $a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2$

Paso 4
Repetir los pasos dos y tres para el siguiente termino

(E8) $i := 2 \qquad C := 2 \qquad a_i := \mathrm{floor}\left(\frac{C}{B^i}\right) \qquad a_2 = 0$

(E9) $0 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2$

(E10) $0 \cdot 3^2 - 0 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2 - 0$

(E11) $a_1 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2$

(E13) $i := 1 \qquad C := 2 \qquad a_i := \mathrm{floor}\left(\frac{C}{B^i}\right) \qquad a_1 = 0$

(E14) $0 \cdot 3^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2$

(E15) $a_0 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2$

(E16) $i := 0 \qquad C := 2 \qquad a_i := \mathrm{floor}\left(\frac{C}{B^i}\right) \qquad a_0 = 2$

(E17) $2 + a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 2$

(E18) $a_{-1} \cdot 3^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 3^{-m} = 0$

Podemos ver que a partir de la E18 cualquier otro valor de a_i seria igual a cero ya que C = 0 y que todos los coeficientes son positivos. Por lo que concluye aquí el procedimiento y sabemos que m=0.

El resultado final seria $(29)_{10} \rightarrow (1002)_3$

Programa
Para dejar bien establecidos los pasos del algoritmo a continuación se presenta una función de un programa en de Visual Basic donde es aplicado:

```
Public Function CambioBase(NumBaseDiez As Single, BaseNueva As Integer) As Double

    Dim n As Integer
    Dim C As Single
    Dim B As Integer
    Dim a() As Integer

    Dim Negativo As Boolean
    Dim i, j As Integer
    Dim Respuesta As String

    C = NumBaseDiez
    B = BaseNueva

    REM     Recuerda cuando el signo del numero es negativo
    If C < 0 Then
        Negativo = True
        C = Abs(C)
    Else: Negativo = False

    REM     Exponente del coeficiente con mayor peso
    n = Int(Log(C) / Log(B))

    REM             Nota: el Coeficiente de mayor peso es a(0)
    Resultado = "" ' el limpia el resultado
    REM             Comienza el ciclo para números enteros.
    ReDim a(0 To n)
    For i = 0 To n
        a(i) = Int(C / B ^ (n - i))
        C = C - a(i) * B ^ (n - i)
        Respuesta = Respuesta + Str(a(i))
    Next
    REM         Comienza el ciclo para números decimales.
    i = n
    If C > 0 Then Respuesta = Respuesta + "."
    Do While (C > 0)
        ReDim a(0 To i)
        a(i) = Int(C / B ^ (n - i))
        C = C - a(i) * B ^ (n - i)
        Respuesta = Respuesta + Str(a(i))
        i = i + 1
        If i > n + 10 Then
```

```
            MsgBox    "Tiene    muchas    cifras    decimales",    vbExclamation,
"Desbordamiento"
            Exit Do
        End If

    Loop
    REM         Coloca signo negativo
    If Negativo = True Then Respuesta = "-" + Respuesta
   REM Convierte la respuesta en un numero
   CambioBase = Val(Respuesta)

End Function
```

Demostración

Dado un número real "M" positivo expresado en base decimal, lo podemos expresar como "Y" en una base "B" donde se cumplen las siguientes condiciones:

(C1) $Y \in R$ (es un numero Real)
(C2) $B \in N$ (es un numero Natural)
(C3) $B>1$

Entonces podemos decir que la siguiente igualdad se cumple:

(D1) $$a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} \cdot B^{-1} + \ldots + a_{-k} \cdot B^{-k} = M$$

La cual se puede expresar de manera compacta como:

(D2) $$\sum_{i=-k}^{n} a_i \cdot B^i = M$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

(C4) $i \in Z$ (Es un número entero)
(C5) $n \geq i \geq -k$
(C6) $a_i \in N$ (Es un número natural)
(C7) $B>a_i \geq 0$

Podemos rescribir D1 para obtener:

(D3) $$a_n \cdot B^n + \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot B^i = M$$

De C2, C3, C7 y dado que M es positivo, podemos eliminar la sumatoria para transformar la ecuación D3 en la siguiente inecuación:

(D4) $$a_n \cdot B^n \leq M$$

Dado que tanto a_n como B^n pertenecen a los números naturales (C2 y C4) tenemos que:

(D5) $$B^n \leq a_n \cdot B^n \leq M$$

Por la propiedad transitiva

(D6) $B^n \le M$

Aplicando Logaritmos a ambos lados de la inecuación:

(D7) $\mathrm{Log}(B)^n \le \mathrm{Log}(M)$

(D8) $n \le \dfrac{\mathrm{Log}(M)}{\mathrm{Log}(B)}$

Ahora demostremos que:

(S1) $B^{n+1} > M$

De D1

(S2) $B^{n+1} > a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_0 + a_{-1} \cdot B^{-1} + \ldots + a_{-k} \cdot B^{-k}$

Dividiendo ambos lados entre B^{n+1}

(S3) $1 > \dfrac{a_n}{B^1} + \dfrac{a_{n-1}}{B^2} + \ldots + \dfrac{a_0}{B^{n+1}} + \dfrac{a_{-1}}{B^{n+2}} + \ldots + \dfrac{a_{-k}}{B^{n+1+k}}$

Dado que B es siempre mayor que a_i para cada valor de i desde n hasta k y aplicando los criterios de convergencias de series, se puede ver que la desigualdad anterior es verdadera y por lo tanto S1 es verdadero. Concluyendo que:

(D9) $B^{n+1} > M$

Aplicando logaritmo a ambos lados de la inecuación D9, tenemos:

(D10) $\mathrm{Log}(B)^{n+1} > \mathrm{Log}(M)$

(D11) $n + 1 > \dfrac{\mathrm{Log}(M)}{\mathrm{Log}(B)}$

De D8 y D11 concluimos que:

(D12) $n \le \dfrac{\mathrm{Log}(M)}{\mathrm{Log}(B)} < n + 1$

Dado que n es entero, y en base a la definición de la función mayor entero (y= floor(x) o y = [x]) concluimos que :

(EQ1) $n = \mathrm{floor}\left(\dfrac{\mathrm{Log}(M)}{\mathrm{Log}(B)}\right)$

Que es igual a la ecuación E2 que utilizamos en el ejemplo.

Si copiamos la expresión D3 y D4:

(D3) $$a_n \cdot B^n + \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot B^i = M$$

(D4) $$a_n \cdot B^n \le M$$

Dividiendo entre B^n a ambos lados de D3 y D4, obtendremos:

(D13) $$a_n \le \frac{M}{B^n}$$

(D14) $$a_n + \sum_{i=-k}^{n-1} a_i \cdot \frac{B^i}{B^n} = \frac{M}{B^n}$$

La cual simplificada puede ser escrita como:

(D15) $$a_n + \sum_{i=-k}^{n-1} \frac{a_i}{B^{n-i}} = \frac{M}{B^n}$$

Por definición (C7) sabemos que ai < B y aplicando el teorema de limite a la sumatoria garantizamos que:

(D16) $$\sum_{i=-k}^{n-1} \frac{a_i}{B^{n-i}} < 1$$

Lo que nos lleva a:

(D17) $$a_n + \sum_{i=-k}^{n-1} \frac{a_i}{B^{n-i}} < a_n + 1$$

Por la propiedad transitiva:

(D18) $$\frac{M}{B^n} < a_n + 1$$

De D13 y D18 concluimos que:

(D19) $a_n \leq \frac{M}{B^n} < a_n + 1$

Dado que a_n es entero, y en base a la definición de la función mayor entero (y= floor(x) o y = [x]) concluimos que :

(EQ2) $$a_n = \text{floor}\left(\frac{M}{B^n}\right)$$

Aplicación
Al estudiar en detalle el algoritmo anterior podemos darnos cuenta que es más complicado que el método tradicional de cambio de base que se realiza a través de residuos de una simple división euclidea; Además que para su implementación se requiere el uso de una función trascendental (Log o LN). Basado en estas dos premisas fácilmente se podría argumentar que su utilidad es nula y que no es más que una curiosidad matemática o un "método complicado para resolver un problema sencillo". Sin embargo al plantear el problema desde otra perspectiva nos podemos dar cuenta de la magnitud de su alcance y ver que este es solo el principio por el cual se rigen las reglas para resolver otros planteamientos más complicados y donde se verá realmente la utilidad del mismo.

Para entender lo expuesto en el párrafo anterior veamos el siguiente ejemplo:

Dado el número 211 escrito en una base desconocida x, y que escrito de manera decimal equivale al número 22, encontrar la base x.

- El planteo de forma algebraica de este problema es:

(E21) $$2 \cdot x^2 + x + 1 = 22$$

- Como podemos ver es un problema sencillo que podría ser resuelto con formula cuadrática, sin embargo utilizaremos un método alternativo donde se apliquen los principios aquí desarrollados. Comenzaremos usando la ecuación EQ1

(E22) $$2 = \text{Floor}\left(\frac{\ln(22)}{\ln(x)}\right)$$

- Si a esta expresión le aplicamos la definición de mayor enero, tenemos la inecuación:

(E23) $$2 \leq \frac{\ln(22)}{\ln(x)} < 3$$

- Con lo que tendremos dos inecuaciones para Ln(x)

(E24) $$2 \cdot \ln(x) \leq \ln(22)$$

(E25) $$\ln(22) < 3\cdot\ln(x)$$

De donde fácilmente se puede demostrar que

(E26) $$\frac{\ln(22)}{3} < \ln(x) \le \frac{\ln(22)}{2}$$

Finalmente x es un valor definido entre:

(E27) $$e^{\frac{\ln(22)}{3}} < x \le e^{\frac{\ln(22)}{2}}$$

(E27) $$2.802 < x < 4.69$$

Como premisa para poder aplicar este método se supone que x es un natural, por lo que las únicas respuestas posibles en dicho intervalo son x = 3 y x = 4.

Bastaría realizar una prueba con cada uno de estos valores en E21 para darnos cuenta cual es resultado, sin embargo y con la intención de sistematizar un procedimiento no lo haremos de esta manera, sino que separaremos las variables de los números:

(E28) $$2\cdot x^2 + x = 21$$

Sacando el factor común en la parte derecha de E28

(E29) $$x\cdot(2\cdot x + 1) = 21$$

Dado que x es un entero, como se acoto anteriormente, podemos asegurar con exactitud que también es uno de los factores del número a la derecha del paréntesis, 21 en este caso particular o sea 1, 3, 7 ó 21. Finalmente y basándose en la conclusión sacada a partir de E27 se sabe que la respuesta para este ejemplo particular es 3. Cabe hacer notar que dado caso que el número a la derecha del igual tuviera una parte fraccionaria, se procede de la misma manera con la única diferencia que tanto esta como cualquier variable con exponente negativo deben ser ignoradas

Como se puede ver este método se puede utilizar para resolver una familia infinita de expresiones algebraicas. El problema entonces consistirá únicamente poder clasificar una expresión particular como miembro de dicha familia; aunque hasta la actualidad no he realizado ningún tipo de estudio a fondo sobre las características de dicho grupo de manera intuitiva se pueden adelantar las siguientes:
Dada una expresión de la siguiente forma

$$\sum_{i=-k}^{n} a_i \cdot x^i = M$$

donde x es la incógnita

Cada a_i debe ser un número Natural diferente de cero.

n y k son dos números naturales tales que $n \geq i \geq -k$.
x es un número Natural tal que $x > a_i \geq 0$. (esta es la más difícil de constatar a priori dado que se refiere al valor que estamos buscando.)

M es un número Real cualquiera.

Alejandro José Raudales
guasculile@yahoo.com