INTRODUCCIÓN A LAS CATEGORÍAS Y FUNTORES

1. DEFINICIONES
2. LOS AXIOMAS DE BIRKOFF-MCLANE
3. ALGUNOS TEOREMAS BÁSICOS

1. DEFINICIONES:

Definición 1.1.

Se llama categoría a toda clase, ξ, tal que todo par ordenado, (a,b), de sus elementos tenga asociado un conjunto.

Los elementos de la clase ξ se llaman objetos de la categoría.

Los elementos del conjunto asociado al par ordenado de objetos (a, b) se llaman morfismos de dominio a y codominio b, Se representa por $(a,b)_{\xi}$ el conjunto de todos los morfismos asociados al par (a,b) de la categoría ξ.

Una categoría tal que la clase de sus objetos es un conjunto se llama pequeña categoría.

Definición 1.2.

Se llama función-objeto de la categoría ξ en la categoría ξ' a toda función F_0 de ξ en ξ'.

O sea:

F_0 función-objeto de la categoría x en la categoría x' «
« rel F_0 Ù ("a,a',a")((a,a') Î F_0 Ù (a,a") Î F_0 ® a' = a") Ù
Ù (a Î x Ù a' Î x' Ù a" Î x')

Si (a, a') ∈ F_0 , representaremos por a' = F_0 a.

Se llama función-morfismo covariante asociada a la función-objeto F_0, definida de la categoría ξ en la categoría ξ', a toda función F_{m1} de $(a, b)_{\xi}$ en $(F_0\, a, F_0 b)_{\xi'}$.

O sea:

F_{m1} función-morfismo covariante asociada a F_0 «
« rel F_{m1} Ù ("f,f',f")((f,f') Î F_{m1} Ù (f,f") Î F_{m1} ® f' = f") Ù
Ù (f Î $(a, b)_x$ Ù f' Î $(F_0\, a, F_0 b)_{\xi'}$ Ù f" Î $(F_0\, a, F_0 b)_{\xi'}$)

Se llama función-morfismo contravariante asociada a la función-objeto F_0, definida de la categoría ξ en la categoría ξ', a toda función F_{m2} de $(a,b)_{\xi}$ en $(F_0\, b, F_0 a)_{\xi'}$.

O sea:

F_{m2} función-morfismo contravariante asociada a F_0 «
« rel F_{m2} Ù ("f,f',f")((f,f') Î F_{m2} Ù (f,f") Î F_{m2} ® f' = f") Ù
Ù (f Î $(a,b)_x$ Ù f' Î $(F_0\, b, F_0 a)_{\xi'}$ Ù f" Î $(F_0\, b, F_0 a)_{\xi'}$)

Definición 1.3.

Se llama funtor covariante de la categoría ξ en la categoría ξ' al par formado por una función-objeto y una función-morfismo covariante asociada.

Se llama funtor contravariante de la categoría ξ en la categoría ξ' al par formado por una función-objeto y una función-morfismo contravariante asociada.

Representamos en general:

Funtor covariante: (F_0, F_{m1})

Funtor contravariante: (F_0, F_{m2})

Definición 1.4.

Una categoría ξ_0 e dice subcategoría de otra categoría ξ, si, y solo si, se verifica que

1) $\xi_0 \subset \xi$

2) $(a,b)_{\xi 0} \subset (a,b)_{\xi}$, $(\forall a,b) \in \xi_0$.

Definición 1.5.

Una categoría ξ^{op} se dice opuesta de otra categoría ξ si, y solo si, se verifica que

1) $\xi^{op} = \xi$

2) $(a,b)_{\xi} = (b,a)_{\xi}$

Definición 1.6.

Un objeto I es un objeto inicial de la categoría ξ si, y solo si, para todo objeto a de ξ existe un único morfismo $f \in (I,a)_{\xi}$

O sea:

$I \in \xi$ es objeto inicial de ξ « ("*a)(a* $\in \xi$)($\exists$f único)(f $\in (I,a)_{\xi}$)

Un objeto F es un objeto final de la categoría ξ si, y solo si, para todo objeto a de ξ existe un único morfismo $f \in (a,F)_{\xi}$

O sea:

$F \in \xi$ es objeto final de ξ « ("*a)(a* $\in \xi$)($\exists$f único)(f $\in (a,F)_{\xi}$)

2. LOS AXIOMAS DE BIRKOFF-MCLANE:

El sistema básico de los axiomas de Birkoff y McLane consta de cuatro axiomas referidos a categorías y de dos axiomas que se refieren a funtores.

Axioma 1: Axioma de la existencia de los morfismos:

Para todo par de objetos de una categoría existe un conjunto de morfismos asociado.

$$(\forall a,b)(a\in \boldsymbol{x}, b\in \boldsymbol{x}, \exists (a,b)_x \wedge C(a,b)_x$$

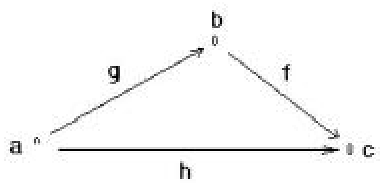
$$f\in (a,b)_x \qquad f: a\rightarrow b$$

Axioma 2: Axioma de composición de morfismos:

Para toda terna de objetos, a, b, c, de una categoría ξ existe una ley de composición que asocia un único morfismo de $(a,c)_\xi$ a cada par ordenado de morfismos del producto $(b,c)_\xi$ x $(a,b)_\xi$.

$$(\forall f,g)(f\in (b,c)_x, g\in (a,b)_x, \exists h\in (a,c)_x\, unico\, /\, f o g = f)$$

$$f\in (b,c)_x, g\in (a,b)_x, h\in (a,c)_x$$

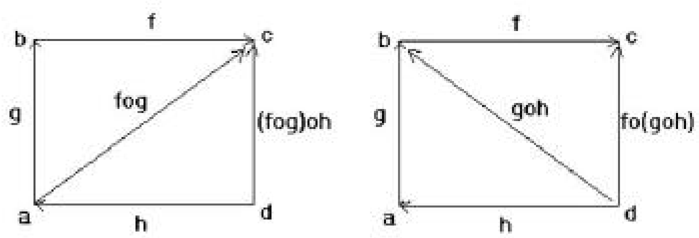


h = fog

Axioma 3: Axioma de Asociatividad:

La ley de composición de morfismos es asociativa.

$$(\forall a,b,c)(f\in (b,c)_x, g\in (a,b)_x, h\in (d,a)_x, (f o g) o h = f o (g o h))$$

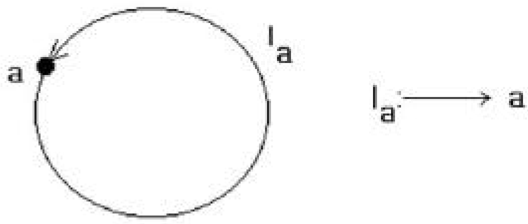


(fog)oh = fo(goh)

Axioma 4: Axioma del morfismo identidad:

Para todo objeto a de una categoría ξ existe al menos un morfismo, I_a, que tiene el objeto a por dominio y también por codominio y es elemento neutro respecto de la ley de composición de morfismos.

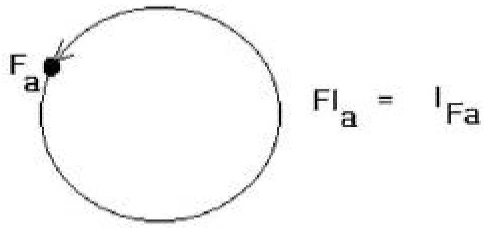
$$\forall a \in \xi, \exists I_a \in (a,a)_\xi \,/\, \left[(f o I_a = f, \forall f \in (a,b)_\xi, \forall b \in \xi) \wedge (I_a o g = g, \forall g \in (c,a)_\xi, \forall c \in \xi) \right]$$



Axioma 5: Axioma funtorial sobre identidad:

Dadas dos categorías, ξ y ξ', la función F: ξ → ξ' y un objeto cualquiera, a, de la categoría ξ, se cumple que la identidad I_{FA} coincide con F_{Ia}.

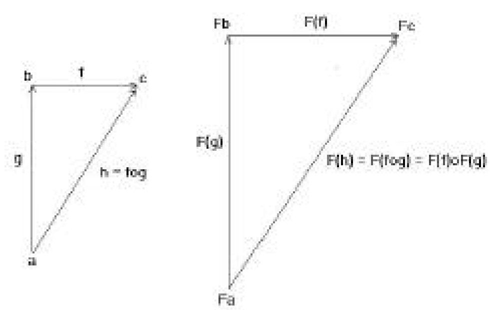
$$(\forall a)(a \in \xi, FI_a = I_{Fa})$$



Axioma 6 (1): Axioma del funtor covariante:

Dadas las categorías ξ y ξ', y el funtor covariante F: ξ → ξ', se tiene que la composición de las imágenes de cualquier par de morfismos coincide con la imagen de la composición de los mismos en el orden dado.

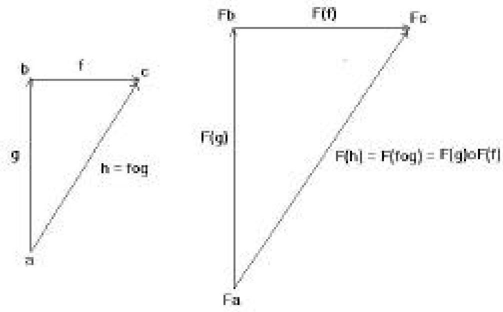
$$(\forall f, g)(f \in (b,c)_\xi \wedge g \in (a,b)_\xi, F(fog) = F(f)oF(g))$$



Axioma 6 (2): Axioma del funtor contravariante:

Dadas las categorías ξ y ξ', y el funtor contravariante F: $\xi \rightarrow \xi'$, se tiene que la composición de las imágenes de cualquier par de morfismos coincide con la imagen de la composición de los mismos en orden contrario del dado.

$$(\forall f, g)(f \in (b,c)_{\xi} \wedge g \in (a,b)_{\xi}, F(fog) = F(g)oF(f))$$



3. ALGUNOS TEOREMAS BÁSICOS:

Teorema 3.1.

$$\forall a \in \mathbf{x}, \exists Ia \text{ único}$$

En efecto:

Supongamos que hay dos morfismos identidad. Se tiene:

Ia o I'a = I'a o Ia = Ia = I'a

Teorema 3.2.

Todo conjunto ordenado P puede considerarse una pequeña categoría.

En efecto:

Si es P = {a, b, c, ... } un conjunto ordenado, sus morfismos se pueden definir así:

$(x,y)_\xi = \{f\} \Leftrightarrow x \leq y$

$(x,y)_\xi = \phi \Leftrightarrow x > y$

puesto que si $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, se tiene

$(x,x)_\xi = \{I_x\}$

$(y,y)_\xi = \{I_y\}$

Teorema 3.3.

Toda pequeña categoría, ξ en la que cada conjunto de morfismos es una clase unitaria y todo morfismo invertible es la identidad puede considerarse un conjunto ordenado.

En efecto:

Sea P el conjunto cuyos elementos son los objetos de la categoría:

P = {a, b, c, ... }. Definimos en P la relación "≤" del modo siguiente:

$$x, y \in P,\ \ x \leq y \leftrightarrow (x,y)_x \neq \Phi$$

tal relación en P es de órden:

- Es reflexiva:

$$\forall x \in P, \exists i_x \in (x,x)_x \to (x,x)_x \neq \Phi$$

- Es antisimétrica:

$$\forall x, y \in P, \begin{cases} (x,y)_x = \{f\} \neq \Phi \\ (y,x)_x = \{g\} \neq \Phi \end{cases} \to f, g \text{ morfismos inversibles} \to f = g = i \ (i: identidad) \to$$

$$\to i \in (x,x)_x = (y,y)_x \to x = y$$

- Es transitiva:

$$\forall x, y \in P, \begin{cases} x \le y \to (x,y)_x = \{f\} \ne \Phi \\ y \le z \to (y,z)_x = \{g\} \ne \Phi \end{cases} \to (x,z)_x = \{fog\} \ne \Phi \to x \le z$$

Definición 3.1. (Definición de isomorfismo)

a) Sea ξ una categoría. Se dice que f $\in$ (a, b)$_\xi$ es un *isomorfismo* sii existe otro morfismo g $\in$ (b,a)$_\xi$ tal que fog = i_b y gof = i_a. O sea:

f $\in$ (a, b)$_\xi$ isomorfismo $\leftrightarrow$ $\exists$ g $\in$ (b,a)$_\xi$ / fog = i_b $\wedge$ gof = i_a

b) Dos objetos, a, b, de la categoría ξ se dice que son isomorfos, sii existe un isomorfismo f $\in$ (a, b)$_\xi$. O sea:

a, b $\in$ ξ isomorfos $\leftrightarrow$ ($\exists$f)(f $\in$ (a,b)$_\xi$ $\wedge$ f isomorfismo)

Teorema 3.4.

Si un morfismo, f, admite inverso, g, tal inverso es único.

En efecto:

Supongamos que hay dos inversos, g_1, y g_2:

$$g_1, g_2 \in (a,b)_x \ / \ fog_1 = fog_2 = i_b \wedge g_1of = g_2of = i_a \to g_1o(fog_2) = g_1o(fog_1) \to$$
$$\to (g_1of)og_2 = (g_1of)og_1 \to i_aog_2 = i_aog_1 \to g_2 = g_1$$

Definición 3.2. (Definición de monomorfismo)

Un morfismo m $\in$ (a, b)$_\xi$ es un monomorfismo sii se cumple que mof = mof' $\to$ f = f', siendo f y f' morfismos de (b, a)$_\xi$. O sea:

$$m \in (a,b)_x \ \ monomorfismo \to (\forall f, f')(f \in (b,a)_x \wedge f' \in (b,a)_x \to (mof = mof' \to f = f'))$$

Teorema 3.5.

. m $\in$ (a, b)ξ invertible por la izquierda $\to$ m monomorfismo

En efecto:

Sea $m_1 \in (b,a)_x \ / m_1om = i_a \to (\forall f_1, f_2)(f_1 \in (b,a)_x \wedge f_1 \in (b,a)_x \wedge mof_1 = mof_2 \to$

$$\to m_1o(mof_1) = m_1o(mof_2) \to (m_1om)of_1 = (m_1om)of_2 \to f_1 = f_2$$

Definición 3.3. (Definición de epimorfismo)

$$e \in (a,b)_x \ \ epimorfismo \to (\forall f, f')(f \in (b,a)_x \wedge f' \in (b,a)_x \to (foe = f'oe \to f = f'))$$

Teorema 3.6.

. e $\in$ (a, b)ξ invertible por la derecha $\to$ e epimorfismo

En efecto:

Sea $e_1 \in (b,a)_x \ / eoe_1 = i_a \to (\forall f_1, f_2)(f_1 \in (b,a)_x \wedge f_1 \in (b,a)_x \wedge f_1oe = f_2oe \to$

$$\to (f_1oe)oe_1 = (f_2oe)oe_1 \to f_1o(eoe_1) = f_2o(eoe_1) \to f_1 = f_2$$

Teorema 3.7.

a) Si en una categoría existen dos objetos iniciales, son isomorfos.
b) Si en una categoría existen dos objetos finales, son isomorfos.

En efecto:

a) Sean I y T dos objetos iniciales de la categoría ζ :

$$(\exists f_1, f_2 \; unicos)\left(f_1 \in (I,a)_x \wedge f_2 \in (T,a)_x\right) \rightarrow (\exists h,h')(h \in (T,I)_x \wedge h' \in (I,T)_x \wedge$$

$$\wedge f_2 = f_1 oh \wedge f_1 = f_2 oh') \rightarrow \begin{cases} f_2 = (f_2 oh')oh = f_2 o(h'oh) \rightarrow I_T = h'oh \\ f_1 = (f_1 oh)oh' = f_1 o(hoh') \rightarrow I_I = hoh' \end{cases} \rightarrow h'oh =$$

$$= hoh' = I_T = I_I \rightarrow h,h' \; inversibles \rightarrow h.h' \; isomorfismos \rightarrow I,T \; objetos \; isomorfos$$

b) Análogamente, en el caso de dos objetos finales.

Definición 3.4. (Funtores isomorfismo, monomorfismo, epimorfismo)

a) Un funtor isomorfismo es un funtor para el cual la función-objeto y la función-morfismo son biyecciones.
b) Un funtor monomorfismo es un funtor para el cual la función-objeto y la función-morfismo son inyecciones.
c) Un funtor epimorfismo es un funtor para el cual la función-objeto y la función-morfismo son suprayecciones.

Teorema 3.8.

Dados dos funtores, F:$\xi \rightarrow \xi'$ y G: $\xi' \rightarrow \xi''$, la función compuesta GoF:$\xi \rightarrow \xi''$ es un funtor covariantes si F y G tienen la misma variancia (ambos son covariantes o bien ambos son contravariantes), y es un funtor contravariantes si F y G tienen distinta variancia (uno es covariante y el otro es contravariante).

En efecto:

- Bastará hacer una comprobación trivial, tanto con la función-objeto de cada funtor, como con la correspondiente función-morfismo, en los cuatro casos posibles: que ambos funtores sean covariantes, que el primero sea covariante y el segundo contravariante, que el primero sea contravariante y el segundo covariante, y, finalmente, que ambos sean contravariantes.

Definición 3.5. (Categoría producto)

Se llama categoría producto de las categorías ξ y ξ' a una categoría cuyos objetos y morfismos se definen de la siguiente manera:

- Los objetos X son los pares ordenados (x, x') donde $x \in \xi$ y $x' \in \xi'$:

$$\xi x \xi = \{(x,x') / x \in \xi \wedge x' \in \xi'\}$$

- Los morfismos $f_p \in (X, Y)_{\xi x \xi'}$, con $X = (x, x')_{\xi x \xi'}$, $Y = (y, y')_{\xi x \xi'}$, son los pares (f, f') donde $f \in (x, y)_{\xi}$, $f' \in (x', y')_{\xi'}$:

$$f_p \in (X,Y)_{\xi x \xi} \to f_p = \{(f,f')/f \in (x,y)_{\xi} \wedge f' \in (x',y')_{\xi'} \wedge X = (x,x')_{\xi x \xi'} \wedge Y = (y,y')_{\xi x \xi'}\}$$

cumpliendo la ley de composición:

$$f_p x g_p = (f,f')o(g,g') = (fog, f'og')$$

Teorema 3.9.

Se verifican los axiomas B-M para la categoría producto.

En efecto:

- Es una comprobación trivial.

Definición 3.6. (Funtor producto)

Se llama *difuntor* o *funtor producto* de los funtores

$$F: \xi \to \xi''$$
$$G: \xi' \to \xi''$$

al funtor

$$H = F \times G: \xi x \xi' \to \xi''$$

Teorema 3.10.

Se verifican los axiomas B-M para el funtor producto.

En efecto:

- Es una comprobación trivial.