ELEMENTOS DE CALCULO FRACCIONAL

Alberto Mejías[1]

30 DE SEPTIEMBRE DE 1695

- L'HOPITAL ¿Qué pasaría si en la notación $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, *n* asumiera el valor ½?
- LEIBNIZ: Una aparente paradoja, de la cual se extraerán fructíferas consecuencias algún día.

Introducción

El ***cálculo fraccional*** es una rama del análisis matemático que estudia la posibilidad y consecuencias de dar valores reales al índice *n* de iteraciones del *operador derivada*

$$D = \frac{d}{dx} \tag{1}$$

y del *operador integral* $\int$ al cual, por conveniencia tipográfica, usualmente se denota por *J*.

El índice de iteraciones se refiere a las aplicaciones sucesivas en el mismo sentido en que

$$f^0(x) = x, \quad f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \quad f^3(x) = f(f(f(x))), \quad etc. \tag{2}$$

[1] Alberto R. Mejías E., es Licenciado en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, ULA (Mérida – Venezuela). Profesor de Análisis y Topología. Actualmente es jubilado de la Universidad de los Andes.
alrame59@cantv.net, alrame59@gmail.com, alrame59@hotmail.com.

Elementos de cálculo fraccional

Así, para *n* entero no negativo,

$$f^{n}(x) = \underbrace{f(f\cdots(f(}_{n\,veces}x))\cdots); \tag{3}$$

$$D^{0}f(x) = \frac{d^{0}}{dx^{0}}f(x) = f^{(0)}(x) = f(x), \tag{4}$$

$$D^{1}f(x) = Df(x) = \frac{d^{1}}{dx^{1}}f(x) = \frac{d}{dx}f(x) = f^{(1)}(x) = f^{'}(x), \tag{5}$$

$$D^{2}f(x) = DDf(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^{2}}{dx^{2}}f(x) = f^{(2)}(x), \tag{6}$$

...

$$D^{n}f(x) = \underbrace{DD\cdots D}_{n\,veces}f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}}_{n\,veces}f(x) = \frac{d^{n}}{dx^{n}}f(x) = f^{(n)}(x) \tag{7}$$

La Integral Iterada

Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable (en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluada con respecto a *diferentes* variables).

El primer teorema fundamental del cálculo establece que si $F(x) = D^{-1}f(x)$, es la integral Jf de $f(x)$, entonces

$$\int_{0}^{x} f(x)dx = F(x) - F(0). \tag{8}$$

Ahora, si $F(0) = 0$, entonces

$$J^{1} = Jf = D^{-1}f(x) = F(x) = \int_{0}^{x} f(x)dx. \tag{9}$$

Consecuentemente, por inducción, si *F(0) = F(F(0)) = … = 0*, entonces la *n–ésima integral* $J^n f$ de *f(x)*, viene dada por

$$J^n f = D^{-n} f(x) = \underbrace{\int \int \cdots \int_0^x}_{n\,veces} f(x)\, \underbrace{dx\,dx \cdots dx}_{n\,veces} = \int_0^x \frac{f(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt. \quad (10)$$

Ahora, podemos plantearnos la cuestión de interpretar, significativamente,

$$\sqrt{D} = D^{1/2} \quad (11)$$

como una raíz cuadrada del operador derivada (un operador *semi-iterado*); esto es, una expresión para un operador que al ser aplicado dos veces a una función, tenga el mismo efecto que el operador derivada.

Más generalmente, podemos plantearnos la cuestión de definir D^s para valores reales de *s* de tal forma que cuando *s* tome un valor entero *n*, coincida con el índice usual de la *n*-ésima derivación para $n \geq 0$ y con el -*n*-ésimo índice de $\int$ para $n < 0$.

Hay varias razones para plantearse esta cuestión. Una es que considerando a los índices como potencias, se puede considerar al semigrupo de las potencias D^n, en la variable discreta *n*, inmerso dentro de un *semigrupo continuo* (eso se espera) con el parámetro *s* que es un número real. Los semigrupos continuos son frecuentes en matemáticas y tienen una teoría interesante. Nótese que *fracción* es un nombre equívoco para el exponente, ya que no tiene que ser racional; pero, la expresión *cálculo fraccional* se ha hecho tradicional.

La Derivada Fraccional

Los fundamentos de la materia fueron establecidos por Liouville en una publicación de 1832. Actualmente, la derivada fraccional de orden *a* de una función se define mediante las *transformadas integrales de Fourier o Mellin*. Un hecho notable es que la derivada fraccional de orden a de una función, en un punto x, es una *propiedad local* sólo cuando a es entero; en los casos en que no es entero, no se puede decir que la derivada fraccional de orden a de una función f en un punto x, depende sólo de la gráfica de f en las cercanías de x, de la forma que lo hace para las potencias enteras. Consecuentemente, es de esperar que la teoría involucre una cierta clase de *condiciones de contorno*, que implique información con respecto a la función, un poco más allá de cierto entorno. Para decirlo metafóricamente, la derivada fraccional, requiere una cierta *visión periférica*.

Consideraciones Heurísticas

Parece natural preguntarse si existe un operador H o **semi-derivada** (*H por half-derivative*) tal que

$$H^2 f(x) = D\, f(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f\,'(x). \tag{12}$$

Resulta que si hay un tal operador y, de hecho, para cualquier $a > 0$, existe un operador

$$(P^{a} f)(x) = f\,'(x) \tag{13}$$

o, para ponerlo de otra manera, $\dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$ está *bien definida* para todos los valores reales de $n \geq 0$. También hay un resultado similar para la integración.

Para explorar algunos detalles, consideremos la *función Gamma* Γ definida por

$$\Gamma(n + 1) = n! \tag{14}$$

Supongamos que una función $f(x)$ está bien definida para $x > 0$ y que podemos determinar la integral desde 0 hasta x. Denotemos esto por

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)dt\,. \qquad (15)$$

Repitiendo este proceso, se obtiene

$$(J^2 f)(x) = \int_0^x (Jf)(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,ds \right) dt\,; \qquad (16)$$

lo cual se puede extender arbitrariamente.

Un importante resultado de Cauchy, permite dar una generalización de esta secuencia:

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (17)$$

Esto nos conduce de una manera muy directa a la generalización para n real. El simple uso de la función Gamma para relevar la naturaleza discreta de la función factorial, provee un candidato natural para usos fraccionales del operador integral:

$$(J^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\,. \qquad (18)$$

Este es, en efecto, un operador bien definido.

Se puede demostrar que el operador J es tanto conmutativo como aditivo; esto es,

$$(J^{\alpha})(J^{\beta}) f = (J^{\beta})(J^{\alpha}) f = (J^{\alpha+\beta}) f = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt\,. \qquad (19)$$

Infortunadamente, el proceso comparable, para el operador derivada D es, significativamente, más complejo; pero, se puede demostrar que, en general, D no es ni conmutativo, ni aditivo.

Media Derivada de una Función Simple

Supongamos que $f(x)$ es un monomio de la forma

$$f(x) = x^k. \tag{20}$$

Su primera derivada es

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = k\, x^{k-1}. \tag{21}$$

Derivando sucesivamente, se obtiene el resultado más general

$$\frac{d^a}{dx^a} x^k = \frac{k!}{(k-a)!} x^{k-a}; \tag{22}$$

el cual, después de substituir los factoriales por la función Gamma, lleva a

$$\frac{d^a}{dx^a} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \tag{23}$$

Así, por ejemplo, la semiderivada de x viene dada por

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)} x^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{1/2} = 2\pi^{-1/2} x^{1/2}. \tag{24}$$

Repitiendo este proceso se obtiene

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} 2\pi^{-1/2} x^{1/2} = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} x^{1/2-1/2} = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} x^0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1. \tag{25}$$

El cual es el resultado esperado; esto es,

$$\left(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\right) x = 1 = \frac{d}{dx}\, x.$$

También podemos atacar la cuestión vía la *transformada Laplace*, considerando que

$$\mathcal{L}\left(t \mapsto \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \mathcal{L}\,J f = s \mapsto \frac{1}{s}(\mathcal{L} f)(s) \tag{26}$$

y

$$\mathcal{L}\,J^2 f = s \mapsto \frac{1}{s}(\mathcal{L}\,J f)(s) = s \mapsto \frac{1}{s^2}(\mathcal{L} f)(s) \tag{27}$$

etc. podemos afirmar que

$$J^\alpha = \mathcal{L}^{-1}(s \mapsto s^{-\alpha}(\mathcal{L} f)(s)). \tag{28}$$

Por ejemplo,

$$J^\alpha(t \mapsto t^k) = \mathcal{L}^{-1}\left(s \mapsto \frac{\Gamma(k+1)}{s^{\alpha+k+1}}\right) = \left(t \mapsto \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\right)t^{\alpha+k} \tag{29}$$

según lo esperado. En efecto, dada la regla de convolución $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ y poniendo $p(x) = x^{\alpha-1}$, se tiene

$$J^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(p)\mathcal{L}(f)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(p*f)$$

$$= x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x p(x-t)\,f(t)\,dt = x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,f(t)\,dt,$$

que es el resultado obtenido anteriormente por la fórmula integral de Cauchy.

Las transformadas Laplace "funcionan" sobre relativamente, pocas funciones; pero, a menudo son útiles para resolver ecuaciones diferenciales.