ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES

---oo0oo---

1. INTRODUCCIÓN:

1.1. DE PRIMER ORDEN:

Se llama **ecuación en derivadas parciales lineal de primer orden** a una ecuación funcional de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = g(x_1,x_2,...,x_n,u) \qquad [1.1]$$

Siendo u función no conocida de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y las funciones f_i y g dependen de todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$.

Es corriente también para [1.1] la notación $\sum_{i=1}^{n}[f_i D_i]u = g(x_1,x_2,...,x_n,u)$.

Si es $f(x_1,x_2,...,x_n,u)=0$ una solución implícita de la ecuación anterior que depende implícitamente de u, esto es, que $\partial f/\partial u \neq 0$, se tiene que es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

por lo que podemos despejar

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial f/\partial x_i}{\partial f/\partial u}$$

y al sustituir en [1.1] obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial f}{\partial x_i} + g(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

resultando, pues, una ecuación lineal en derivadas parciales para la función $f(x_1,x_2,...,x_n,u)$

Esto quiere decir que se verifica, para cada una de las funciones de la ecuación diferencial el llamado **sistema diferencial característico** de la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{g}$$

Si se conocen n integrales primeras distintas de la ecuación diferencial [1.1]:

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_2$$

podemos escribir la solución general de la misma como $F(f_{11},f_2,\ \ldots,\ f_n)=0$, en la forma implícita.

1.2. DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO:

Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$\sum_{a\in A}^{n} f_i(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial^{a_i}u}{\partial x_i^{a_1}} = g(x_1,x_2,...,x_n,u)$$

donde las funciones que intervienen, f_i y g, lo son de las variables x_1, x_2, ..., x_n .

La ecuación diferencial lineal se dice **homogénea**, si es $g \equiv 0$, caso contrario diremos que se trata de una ecuación **completa**.

Puede emplearse aquí también la notación:

$$\left[\sum_{a\in A} f_a D_i^{a_i}\right]u = g(x_1,x_2,...,x_n,u)$$

o, de forma más breve, puede escribirse como

$$L[u] = g, \quad \text{donde es } L = \left[\sum_{a\in A} f_a D_i^{a_i}\right]$$

El operador L así introducido presenta algunas propiedades elementales que permiten actuar de forma muy precisa en el estudio formal de estas ecuaciones:

1) Es lineal, pues debido a la linealidad de la derivada parcial es:

$$L\left[\sum_{k=1}^{r} c_k u_k\right] = \sum_{k=1}^{r} c_k L[u_k]$$

2) Si se conoce una solución particular, u_j, el cambio $u = u_j + v$ transforma a la ecuación completa en una ecuación homogénea:

$$L[u] = L[u_j + v] = L[u_j] + L[v] = g \ \wedge \ L[u_j] = g \ \Rightarrow L[v] = 0$$

3) Cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación homogénea es también solución de la ecuación homogénea:

$$u_j \ \ soluciones, \ j = 1,2,...s \ \wedge \forall c_j \in R \Rightarrow L\left[\sum_{j=1}^{s} c_j u_j\right] = \sum_{j=1}^{s} c_j L[u_j] = \sum_{j=1}^{s} c_j .0 = 0$$

4) S es $u = u(x_1,x_2,...,x_n;\, s_1,s_2,...,s_n)$ una solución multiparamétrica de la ecuación homogénea, entonces la expresión integral siguiente es, también, una solución de dicha ecuación

$$w = \int N(s_1,s_2,...,s_n).u(x_1,x_2,...,x_n;\, s_1,s_2,...,s_n).ds_1 ds_2...ds_n$$

cualquiera que sea la función N de los parámetros. Esto ocurre por el carácter conmutativo de la diferencial, ya que

$$L[w] = \int N(s_1, s_2, ..., s_n).L[u(x_1, x_2, ..., x_n; s_1, s_2, ..., s_n)].ds_1 ds_2 ... ds_n =$$
$$= \int N(s_1, s_2, ..., s_n).o.ds_1 ds_2 ... ds_n = 0$$

1.3. DE SEGUNDO ORDEN:

No resulta posible en general integrar la mayoría de los tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, sin embargo, las técnicas que se manejan en estos estudios tienden a expresar, en casos particulares sencillos, la integral más general con la ayuda de funciones arbitrarias.

Esto indica que, aún cuando hayamos escrito la solución general de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, es necesario, para resolver el problema, adaptar esta solución general tanto a las condiciones iniciales como a las condiciones en los límites de la integración, adaptación no siempre de naturaleza sencilla.

Consideraremos en esta sección ecuaciones lineales en derivadas parciales de segundo orden con solamente dos variables independientes, x e y. Usaremos, entonces, la expresión

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Zz = F(x, y)$$

que, abreviadamente escrita, es

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F(x, y)$$

donde hemos simbolizado:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial xy}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

y también podemos usar la simbolización siguiente:

$$\left(RD_x^2 + SD_xD_y + TD_y^2 + PD_x + QD_y + Z\right)z = F(x, y)$$

o, más abreviadamente, $f(D_x, D_y)z = F(x, y)$, donde es $f(D_x, D_y)$ un polinomio simbólico cuyos coeficientes son funciones de las variables x e y.

También aquí llamaremos **ecuación incompleta u homogénea** a esta ecuación si se verifica que $F(x, y) = 0$, o bien, **ecuación completa o no homogénea** si se trata de una ecuación en la que $F(x, y) \neq 0$.

2. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CON COEFICIENTES CONSTANTES

2.1. SOLUCIONES DE LAS HOMOGÉNEAS.

2.1.1. Las homogéneas reducibles:

Se denominan ecuaciones lineales en derivadas parciales homogéneas reducibles, a aquellas ecuaciones lineales, de cualquier orden, en donde el operador diferencial del primer miembro puede descomponerse en factores de primer grado simbólico, es decir, en derivadas parciales de primer orden.

Esto es, ecuaciones $P\left[D_{x_1}D_{x_2}...D_{x_n}\right]z=0$ que se puedan expresar de la forma:

$$\left(a_0+\sum_{k=1}^{n}a_kD_{x_k}\right)\left(b_0+\sum_{k=1}^{n}b_kD_{x_k}\right)...\left(g_0+\sum_{k=1}^{n}g_kD_{x_k}\right)z=0$$

2.1.1.1. Ecuaciones de segundo orden:

En el caso de ecuaciones lineales de segundo orden, con dos variables, x e y:

$$\left(RD_x^2+SD_xD_y+TD_y^2+PD_x+QD_y+Z\right)z=0$$

serán reducibles si podemos expresarlas de la forma

$$\left(a_0+a_1D_x+a_2D_y\right)\left(b_0+b_1D_x+b_2D_y\right)z=0$$

o, equivalentemente, de la forma

$$\left(b_0+b_1D_x+b_2D_y\right)\left(a_0+a_1D_x+a_2D_y\right)z=0$$

La primera ecuación se satisface para $\left(b_0+b_1D_x+b_2D_y\right)z=0$, y la segunda, análogamente, para $\left(a_0+a_1D_x+a_2D_y\right)z=0$, ambas ecuaciones diferenciales de primer orden que podemos resolver actuando sobre su correspondiente sistema diferencial característico:

En la primera: $b_0z+b_1\frac{\partial z}{\partial x}+b_2\frac{\partial z}{\partial y}=0$, se tiene: $\frac{dx}{b_1}=\frac{dy}{b_2}=-\frac{dz}{b_0z}$

En la segunda: $a_0z+a_1\frac{\partial z}{\partial x}+a_2\frac{\partial z}{\partial y}=0$, se tiene: $\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=-\frac{dz}{a_0z}$

De donde obtenemos, respectivamente:

$$b_1y-b_2x=k_{11}\qquad z=k_{12}e^{-\frac{b_0}{b_1}x}$$

$$a_1 y - a_2 x = k_{21} \qquad z = k_{22} e^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

donde las $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ son las constantes arbitrarias de la integración.

La integral general de cada una de estas dos ecuaciones de primer grado simbólico podemos expresarlas, en definitiva, por

$$z = e^{-\frac{b_0}{b_1}x}.\boldsymbol{j}_1(b_1 y - b_2 x) \qquad z = e^{-\frac{a_0}{a_1}x}.\boldsymbol{j}_2(a_1 y - a_2 x)$$

siendo las $\boldsymbol{j}_1$ y $\boldsymbol{j}_2$ funciones arbitrarias.

2.1.1.2. Generalización:

La solución general puede expresarse, entonces, por

$$z = e^{-\frac{b_0}{b_1}x}.\boldsymbol{j}_1(b_1 y - b_2 x) + e^{-\frac{a_0}{a_1}x}.\boldsymbol{j}_2(a_1 y - a_2 x)$$

Podemos generalizar este resultado para cualquier otra ecuación en derivadas parciales homogénea reducible, con dos variables y con cualquier grado n para el polinomio simbólico del primer miembro:

$$(a_{10} + a_{11}D_x + a_{12}D_y)(a_{20} + a_{21}D_x + a_{22}D_y)\ldots(a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}y)z = 0$$

Y la solución general de cada una de las n ecuaciones de primer grado simbólico:

$$(a_{j0} + a_{j1}D_x + a_{j2}D_y)z = 0 \Rightarrow z = e^{-\frac{a_{j0}}{a_{j1}}}\boldsymbol{j}_{jx}(a_{j1}y - a_{j2}x)$$

Por lo que la ecuación de grado n tiene por solución general:

$$z = \sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{a_{j0}}{a_{j1}}}\boldsymbol{j}_{jx}(a_{j1}y - a_{j2}x)$$

2.1.1.3. El caso de factores simbólicos iguales:

Si hubiera factores simbólicos iguales, o bien con los coeficientes proporcionales, la expresión total anterior tendría entonces menos de n funciones arbitrarias.

Así, si es

$$(aD_x + bD_y + c)(aD_x + bD_y + c)z = 0$$

llamando $u = (aD_x + bD_y + c)z$, se cumple que $(aD_x + bD_y + c)u = 0$, luego es ahora

$u = e^{-\frac{c}{a}x}.\boldsymbol{j}_1(ay - bx)$, de lo cual se tiene que es

$$(aD_x + bD_y + c)z = e^{-\frac{c}{a}x}.\boldsymbol{j}_1(ay - bx)$$

es decir, podemos escribirlo como

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(ay-bx)$$

cuyo sistema diferencial característico es

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(ay-bx)-cz}$$

integrando las dos ecuaciones diferenciales:

- de igualar los dos primer miembros: $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}\rightarrow ay-bx=k_1$
- de igualar el primero con el tercero:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(k_1)-cz}\rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{1}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(k_1)-\frac{c}{a}z\rightarrow\frac{dz}{dx}+\frac{c}{a}z=\frac{1}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(k_1)$$

se obtiene, pues, la ecuación diferencial completa de primer orden

$$z'+\frac{c}{a}z=\frac{1}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(k_1)$$

podemos escribir, entonces, una integral general de la homogénea:

$$Z_g=k_2e^{-\frac{c}{a}x}$$

y una integral particular de la completa:

$$z_p=\frac{x}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(k_1)$$

por lo que la solución general es $z=e^{-\frac{c}{a}x}k_2+\frac{x}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi_1(k_1)=e^{-\frac{c}{a}x}\left[k_2+\frac{x}{a}\varphi_1(k_1)\right]$

que podemos escribir como $z=e^{-\frac{c}{a}x}\left[x\varphi_1(ay-bx)+\varphi_2(ay-bx)\right]$

El procedimiento se generaliza fácilmente a ecuaciones que presenten la forma

$$\left(aD_x+bD_y+c\right)^k z=0 \qquad k>2$$

dando como solución

$$z=e^{-\frac{c}{a}x}\left[x^{k-1}\varphi_1(ay-bx)+x^{k-2}\varphi_2(ay-bx)+...+\varphi_k(ay-bx)\right]$$

o bien, por analogía, si se prefiere la expresión en la variable y:

$$z = e^{-\frac{c}{a}y}\left[y^{k-1}\varphi_1(ay-bx) + y^{k-2}\varphi_2(ay-bx) + \ldots + \varphi_k(ay-bx)\right]$$

2.1.2. Las homogéneas irreducibles:

Aunque no es en general posible obtener soluciones generales si la ecuación no puede ser reducida a factores lineales, si es posible obtener soluciones particulares de forma exponencial.

2.1.2.1. Para dos variables independientes:

Así, para ecuaciones $\varphi(D_x, D_y) = 0$, en donde los términos son de la forma $a_{ij}D^iD^j$ puede hacerse, por analogía con el procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, en las que se ensayan soluciones de la forma e^{ax}, lo siguiente:

ensayemos una solución de la forma e^{ax+by}, obteniendo

$$a_{ij}D_x^iD_y^je^{ax+by} = a_{ij}\alpha^i\beta^je^{ax+by} = \varphi(\alpha,\beta)e^{ax+by}$$

por tanto

$$\varphi(D_x, D_y)z = 0 \rightarrow \varphi(D_x, D_y)e^{ax+by} = \varphi(\alpha,\beta)e^{ax+by} = 0$$

Aparecen, así, tantas soluciones como pares de números (α,β) tales que $\varphi(\alpha,\beta) = 0$. En general, infinitos.

2.1.2.2. Generalización:

Si no son dos variables, sino tres o más:

$$\varphi(D_x, D_y, \ldots, D_w) = 0$$

Obtendríamos tantas soluciones de la forma $e^{ax+by+\ldots+gw}$ como n-plas de números $(\varepsilon, \beta, \ldots, \gamma)$ cumplieran $\varphi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0$, generalmente infinitas.

2.1.2.3. El método de separación de variables:

Supongamos la ecuación diferencial

$$\left(aD_x^{\,2} + bD_y^{\,2} + cD_x + dD_y + e\right)u = 0$$

donde la función u es de variables separables: $u = u(x,y) = f(x).f(y)$

se tiene, entonces:

$$D_xu = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x).g(y) \qquad D_x^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x).g(y)$$

$$D_y u = \frac{\partial u}{\partial y} = f(x).g'(y) \qquad\qquad D_y^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x).g''(y)$$

y la ecuación diferencial queda en la forma:

$$af''(x).g(y) + bf(x).g''(y) + cf'(x).g(y) + df(x).g'(y) + ef(x).g(y) = 0$$

dividiendo toda la ecuación por $f(x).g(y)$:

$$a\frac{f''(x)}{f(x)} + b\frac{g''(y)}{g(y)} + c\frac{f'(x)}{f(x)} + d\frac{g'(y)}{g(y)} + e = 0$$

con lo cual, separando las variables ahora en cada miembro de la ecuación:

$$a\frac{f''(x)}{f(x)} + c\frac{f'(x)}{f(x)} + e = -b\frac{g''(y)}{g(y)} - d\frac{g'(y)}{g(y)}$$

esto es, $a\frac{f''(x)}{f(x)} + c\frac{f'(x)}{f(x)} + e = -b\frac{g''(y)}{g(y)} - d\frac{g'(y)}{g(y)} = k$

por lo que podemos escribir dos ecuaciones diferenciales integrables por separado:

$$a.f''+c.f'+e.f = k.f \quad \rightarrow \quad a.f''+c.f'+(e-k).f = 0$$
$$-b.g''-d.g' = k.g \quad \rightarrow \quad b.g''+d.g'+e.g = 0$$

y la constante k puede tomar aquí, también, infinidad de valores.

2.2. SOLUCIONES DE LAS COMPLETAS

2.1.1. Ecuaciones con el primer miembro reducible:

Son ecuaciones completas de la forma $f(D_x, D_y, ..., D_g) = F(x, y, ..., g)$.

La solución general podemos expresarla como la suma de la solución general de la ecuación homogénea, más una solución particular de la ecuación completa.

En el caso de que el primer miembro sea reducible, la integración se consigue por una reiteración de integraciones de primer orden. Es el caso de que se pueda expresar de esta manera para dos variables, por ejemplo:

$$(a_1D_x + b_1D_y + c_1)(a_2D_x + b_2D_y + c_2)...(a_nD_x + b_nD_y + c_n)z = F(x, y)$$

Efectivamente, si ponemos, para n = 3 y con dos variables:

$$(a_1D_x + b_1D_y + c_1)(a_2D_x + b_2D_y + c_2)(a_3D_3 + b_3D_3 + c_3)z = F(x, y)$$

haciendo $(a_2D_x + b_2D_2 + c_1)(a_3D_x + b_3D_y + c_3)z = u$ quedaría la ecuación de primer orden completa:

$$\left(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1\right)u = F(x,y)$$

de la cual podemos hallar una solución particular $u_1(x,y)$, con lo que se tendría:

$$\left(a_2 D_x + b_2 D_2 + c_2\right)\left(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3\right)z = u_1(x,y)$$

Repetimos ahora el proceso con esta nueva ecuación:

Haciendo $\left(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3\right)z = v$ quedaría la ecuación de primer grado completa:

$$\left(a_2 D_x + b_2 D_2 + c_2\right)v = u_1(x,y)$$

de la cual podemos hallar una solución particular $v_1(x,y)$, con lo que se tendría:

$$\left(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3\right)z = v_1(x,y)$$

y de aquí se obtiene, finalmente, la integral particular z_1 de la ecuación completa, mientras que la integral general de la homogénea, z_{gh}, se obtiene en la forma indicada en la sección 2.1.1.

Por tanto, la integral general podemos expresarla como

$$z = z_{gh} + z_1$$

Este procedimiento es obviamente generalizable a ecuaciones con coeficientes constantes y primer miembro reducible de un orden cualquiera y de cualquier número de variables.

2.1.2. Ecuaciones con el primer miembro irreducible:

En este caso no podemos usar un método tan general como el de la reiteración de la sección anterior, sino que, dependiendo de la forma de la función *F(x,y)* del segundo miembro, resultará necesario actuar de forma diferente en cada caso.

Así, podemos intentar la solución de la ecuación completa

$$f\left(D_x, D_y\right)z = F(x,y)$$

en casos específicos como los siguientes:

a) Si el segundo miembro es de la forma $F(x,y) = k.e^{ax+by}$

- Si $f(a,b) \neq 0$

En este caso podemos ensayar soluciones de la forma $z = c.e^{ax+by}$, con lo cual se tendría:

$$f\left(D_x, D_y\right)c.e^{ax+by} = c.e^{ax+by} f(a,b) = k.e^{ax+by} \rightarrow c = \frac{k}{f(a,b)}$$

y la solución sería:

$$z = \frac{k}{f(a,b)} e^{ax+by}$$

- Si $f(a,b)=0$

Ahora habría de ensayarse con una solución del tipo $z = c.x.e^{ax+by}$, con lo cual, se tendría:

$$f(D_x, D_y)c.xe^{ax+by} = c.xe^{ax+by} f(a,b) + c.e^{ax+by} f'_a(a,b) = k.e^{ax+by} \rightarrow c = \frac{k}{f'_a(a,b)}$$

y la solución sería:

$$z = \frac{k}{f'_a(a,b)} e^{ax+by}$$

Análogamente, si también fuera $f'_a(a,b) = 0,$ se ensayaría en primer lugar la solución de la forma $z = c.ye^{ax+by}$, y si sigue persistiendo el problema, probaríamos con $z = c.x^2 e^{ax+by}$ y, en general, llegaríamos a que si fuera $f_a^{k)}(a,b) = 0$, se ensayaría $z = c.x^{k+1} e^{ax+by}$.

b) Si el segundo miembro es de la forma $F(x,y) = m.sen(ax+by) + n.\cos(ax+by)$

Se ensayaría, en principio, solución del tipo $z = k.sen(ax+by) + l.\cos(ax+by)$, y si fuera $f(ia, ib) = 0$ se actuaría como en el caso anterior, llegándose a ensayar soluciones de la forma $z = x^r sen(ax+by) + s^r \cos(ax+by)$ para el caso de que aparecieran términos nulos hasta $f_a^{r-1}(ia, ib) = 0$.

c) Si el segundo miembro es un polinomio entero en x e y

Puesto que la derivada de un polinomio es también un polinomio, es obvio que en estos caos ha de ensayarse una solución polinómica del mismo grado que el polinomio del segundo miembro o bien de grado mayor si falta el termino en z. En la mayor parte de los casos no será necesario probar siquiera polinomios completos, ya que la inspección de la ecuación permite de antemano preveer los términos nulos.

d) Si el segundo miembro es de la forma $x^m x^n .e^{ax+by}$.

En estos casos, aplicando la regla de transposición del factor exponencial puede ser reducida la expresión de la ecuación al caso a).

Pues siendo:

$$D_x e^{ax+by} f(x,y) = a.e^{ax+by} f(x,y) + e^{ax+by} D_x f(x,y) = e^{ax+by}[D_x + a] f(x,y)$$

y análogamente:

$$D_y e^{ax+by} f(x,y) = e^{ax+by}[D_y + b] f(x,y)$$

Esto quiere decir que podemos expresar

$$f(D_x, D_y)e^{ax+by}f(x,y) = e^{ax+by}f(D_x + a, D_y + b)f(x,y)$$

Por tanto, si la ecuación diferencial es de la forma

$$f(D_x, D_y)z = x^m.x^n e^{ax+by}$$

sus soluciones, w, serán también soluciones de la ecuación

$$f(D_x + a, D_y + b)w = x^m x^n$$

puesto que, multiplicando por la exponencial e^{ax+by} :

$$e^{ax+by}f(D_x + a,, D_y + b)w = f(D_x, D_y)we^{ax+by} = x^m x^n e^{ax+by}$$

Y la ecuación $f(D_x + a, D_y + b)w = x^m x^n$,finalmente, del tipo del apartado anterior.

3. SOLUCION DE LAS ECUACIONES CON COEFICIENTES VARIABLES.

No conocemos procedimientos generales de resolución de estas ecuaciones, por lo que se nos hace necesario el tratamiento particular de cada caso en algunos tipos especiales.

3.1. ECUACIONES ANÁLOGAS A LAS DE EULER:

Estas ecuaciones son en general de la forma

$$\sum a(n).x_1^{r_1}.x_2^{r_2}.....x_n^{r_n}.D_{x_1}^{r_1}.D_{x_2}^{r_2}....D_{x_n}^{r_n}z = F\left(x_1^{r_1},...,x_n^{r_n}\right)$$

Para solo dos variables, por ejemplo, serían:

$$\sum a_{rs}.x^r.y^s.D_x^r.D_y^s z = F(x,y)$$

Al igual que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, podemos hacer un pequeño cambio exponencial para transformarlas, cualquiera que sea el orden de la ecuación y el número de sus variables.

Vamos a ver que la ecuación en derivadas parciales de dos variables se transforma en una ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes haciendo el cambio siguiente:

$$x = e^u \ \rightarrow \ u = Lx \qquad\qquad y = e^v \ \rightarrow \ v = Ly$$

Veamos al forma que adquieren los operadores simbólicos:

$$D_x z = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x}D_u z, \quad analogamente: \quad D_y = \frac{1}{y}D_y z$$

para los de segundo orden:

$$D_x^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$
$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{1}{x^2}(D_u^2 - D_u)z$$

en definitiva: $D_x^2 z = \dfrac{1}{x^2}D_u(D_u - 1)z, \qquad D_y^2 z = \dfrac{1}{y^2}D_v(D_v - 1)z$

Los operadores simbólicos de tercer orden serán:

$$D_x^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x^2 z\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(D_x^2 z\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(D_x^2 z\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{x^2}D_u(D_u - 1)z\right) =$$
$$= \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(D_u(D_u - 1)z\right) + \frac{1}{x}\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(D_u(D_u - 1)z\right) = -\frac{2}{x^3}\left(D_u(D_u - 1)z\right) + \frac{1}{x^3}\left(D_u^2(D_u - 1)z\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3} D_u(D_u - 1)(D_u - 2)z$$

y en definitiva: $D_x^3 z = \frac{1}{x^3} D_u(D_u - 1)(D_u - 2)z$, $\quad D_y^3 z = \frac{1}{y^3} D_v(D_v - 1)(D_v - 2)z$

En general es:

$$D_x^r z = \frac{1}{x^r} D_u(D_u - 1)(D_u - 2)\ldots(D_u - r + 1)$$

$$D_y^s z = \frac{1}{y^s} D_v(D_v - 1)(D_v - 2)\ldots(D_v - s + 1)$$

También:

$$D_x^r D_y^s z = \frac{1}{x^r y^s} D_u(D_u - 1)\ldots(D_u - r + 1).D_v(D_v - 1)\ldots(D_v - s + 1)z$$

Por lo que la ecuación dada $\sum a_{rs}.x^r.y^s.D_x^r.D_y^s z = F(x, y)$ se transformaría en

$$\sum a_{rs} D_u(D_u - 1)\ldots(D_u - r + 1).D_v(D_v - 1)\ldots(D_v - s + 1)z = F(e^u, e^v)$$

que tiene coeficientes constantes.

3.2. CASOS SIMPLIFICADOS:

3.2.1. Ecuaciones cuyo orden puede rebajarse:

Son ecuaciones en las que alguno de los operadores simbólicos puede "sacarse factor común", digámoslo así, con lo que su aplicación a la variable puede tomarse como nueva variable de la derivación, rebajándose el orden en una unidad. La ecuación resultante puede tener menor dificultad, que la ecuación dada. Es inmediata la utilidad de esto en las ecuaciones de segundo orden, pues se pueden reducir a ecuaciones de primer orden, siempre integrables.

Veamos el caso de segundo orden:

$$(AD_x^2 + BD_xD_y + CD_x)z = F(x, y) \rightarrow (AD_x + BD_y + C)D_x z = F(x, y)$$

llamamos ahora $w = D_x z$, queda $(AD_x + BD_y)w = F(x - y) - w$, que es de primer orden. O sea, es

$$A\frac{\partial w}{\partial x} + B\frac{\partial w}{\partial y} = F - w$$

Una vez obtenida *W*, la determinación de *z* es inmediata:

$$w = \frac{\partial z}{\partial x} \rightarrow z = \int w.dx + z(y)$$

3.2.2. Ecuaciones con derivada respecto de una sola variable:

En casos como $\left(AD_x^2 + BD_x + C\right)z = F(x,y)$ donde son los coeficientes A, B, C funciones de x e y, puede tratarse el problema con si fuera una ecuación diferencial ordinaria en la variable x, con parámetro y.

3.3. REDUCCIÓN A TIPOS CANÓNICOS:

Sea la ecuación general de segundo orden

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + S\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Z = 0 \qquad [3.3.1]$$

que podemos denotar por

$$Rr + St + Tt + Pp + Qq + Z = F \qquad [3.3.1.b]$$

Y hagamos en ella un cambio de variables, introduciendo las variables u y v por la condición de que anulen a un cierto coeficiente, condición que impondremos a posteriori.

Expresemos las derivadas de la ecuación en función de las nuevas variables u y v:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$s = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Si sustituimos ahora en la ecuación [3.3.1.b] se tendrá la expresión siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+S\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+\\
&+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left[R\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+T\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\\
&+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(R\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+S\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+T\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)+ \qquad [3.3.2]\\
&+\frac{\partial z}{\partial u}\left(R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+S\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\\
&+\frac{\partial z}{\partial v}\left(R\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+S\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}\right)+Zz=F
\end{aligned}
$$

Supondremos en esta ecuación [3.3.2] que los coeficientes R, S, T, P y Q están expresados en la variables u y v. Si imponemos ahora la condición a estas variables u y v para que anulen los coeficientes de los términos $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, se tiene:

$$
R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+S\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0 \qquad R\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+S\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+T\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=0
$$

o sea, se tiene, en definitiva, la ecuación genérica cuadrática:

$$
R\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+S\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+T\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=0
$$

si la consideramos como una ecuación de 2º grado en $\frac{\partial w}{\partial x}$, por ejemplo, podemos discutir sus soluciones mediante el signo de su discriminante

$$
\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-S\frac{\partial w}{\partial y}\pm\sqrt{S^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-4RT\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}{2R}=\frac{-S\pm\sqrt{S^2-4RT}}{2R}\frac{\partial w}{\partial y}
$$

Se tendrían, en este caso, las expresiones:

$$
2R\frac{\partial w}{\partial x}+\left(S+\sqrt{S^2-4RT}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=0, \qquad 2R\frac{\partial w}{\partial x}+\left(S-\sqrt{S^2-4RT}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=0
$$

mientras que la ecuación [3.3.2] queda de la forma:

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}+Cz=F \qquad [3.3.2]
$$

por tanto, pueden darse las siguientes situaciones:

a) $S^2 - 4RT > 0$

Las ecuaciones en las que $S^2 - 4RT > 0$ se denominan ***de tipo hiperbólico*** y la ecuación [3.3.2] constituye el tipo canónico al que puede ser reducida.

El tipo canónico puede escribirse sin el término de la derivada mixta, haciendo un cambio sencillo:

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}(u+v), \qquad \boldsymbol{j} = \frac{1}{2}(u-v)$$

que fácilmente nos conduce a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \boldsymbol{f}^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \boldsymbol{j}^2} + A'\frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{f}} + B'\frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{j}} + C'Z = F' \qquad [3.3.3]$$

b) $S^2 - 4RT < 0$

Estas ecuaciones, en las que $S^2 - 4RT < 0$, se llaman ***de tipo elíptico*** y la ecuación [3.3.2] tiene ahora soluciones imaginarias.

Para eliminar la derivada mixta, haríamos ahora el cambio:

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}(u+v), \qquad \boldsymbol{j} = \frac{1}{2i}(u-v)$$

que nos conduce a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \boldsymbol{f}^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \boldsymbol{j}^2} + A'\frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{f}} + B'\frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{j}} + C'Z = F' \qquad [3.3.3]$$

c) $S^2 - 4RT = 0$

En este caso el cambio de variables por el que la ecuación [3.3.1b] se convierte en la ecuación [3.3.2] puede hacerse con

$$u = x, \qquad v = v(x,y)$$

que conduce, directamente a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + A\frac{\partial Z}{\partial u} + B\frac{\partial Z}{\partial v} + CZ = F$$

que es el llamado ***tipo parabólico***.

4. DOCUMENTACIÓN:

4.1. BIBLIOGRAFÍA:

ADAMS, R., Sobolev Spaces.
Academic Press

BRÉZIS, E., Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications.
Ed. Masson. 1983.

BRÉZIS, E., Análisis funcional.
Alianza Universidad Textos

CAÑADA VILLAR, A., Series y Transformada de Fourier y Aplicaciones.
Universidad de Granada.

CASAS, E., Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Universidad de Cantabria. 1992.

COLOMBO, S., Les Equations aux Dérivées Partielles en Physique et en Mécanique des Milieux Continus.
Ed. Masson. 1976.

COURANT, R. y HILBERT, D., Methods of Mathematical Physics, Vols. 1 y 2; Limusa Wiley

DE VICENTE, S., Modelos Matemáticos en Ecuaciones en Derivadas Parciales de la Física y la Ingeniería. Cuadernos de Matemática Aplicada Nº1.
Ed. Servicio de Publicaciones U. de Oviedo, 1996.

DUCHATEAU, P., ZACHMANN, D.W., Ecuaciones Diferenciales Parciales.
Ed. McGraw-Hill. 1988.

DUFF, G. F. D.y NAYLOR, D., Differential Equations of Applied Mathematics.
Limusa Wiley.

EUVRARD, D., Résolution numérique des équations aux dérivées partielles.
Masson, Paris, 1987.

EVANS, L., C, “Partial differential equations" Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society

FARLOW, S.J., Partial Differenial Equations for Scientists & Engineers.
John Wiley & Sons, New York, 1982.

FOLLAND, G., B., Introduction to partial differential equations.
Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1976.

GILBARG, D., TRUDINGER, N.S., Elliptic partial differential equations of second order.
Springer

HABERMAN, R., Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and boundary Value Problems.
Ed. Prentice-Hall. Second Edition. 1987.

HELLWIG, G., Partial Differential Equations.
B.G. Teubeer. 1977.

HWEI, P. HSU, Análisis de Fourier.
Fondo Educativo Interamericano, S.

JOHN, F., Partial Differential Equations.
Ed. Springer Verlag. New York-Heidelberg-Berlin. Fourth Edition, 1982.

KINDERLEHRER, D., STAMPACCHIA, G., An introduction to variational inequalities and their applications.

MICHEL, A.R., GRIFFITHS, D.F., The finite difference method in partial differential equations.
John Wiley and Sons, London, 1980.

MIJAILOV, V.P., Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.
Mir, Moscœ, 1978.

MIKHAILOV, V., Equations aux Dérivées Partielles.
Ed. Mir. 1980.

MIKHLIN, S.G., Mathematical Physics, An Advanced Course.
North-Holland, Amsterdam, 1970.

MURRAY, R. y SPIEGEL, Transformadas de Laplace; Mc-Graw-Hill (Colección Schaum).

PERAL ALONSO, I., Ecuaciones en derivadas parciales, Addison-Wesley/UAM, Wilmington, Dw, 1995.

RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
Masson, Paris, 1983.

REKTORYS, K., Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering.
D. Reidel Publishing Company, Prague, 1977.

RENARDY, M., ROGERS, R.C., An Introduction to Partial Differential Equations.
Ed. Springer Verlag. 1993.

RODIER, F., Distributions et Transformation de Fourier.
McGraw-Hill. 1984.

RODRÍGUEZ VIDAL, R., Ecuaciones Diferenciales y tema afines. Editorial Vicens Vives, 1972.

SMITH, M. G., Laplace Transform Theory; Van Nostrand.

SMITH, M.G., Theory of Partial Differential Equations.
Van Nostrand.

SNEDDON I. N., Elements of Partial Differential Equations.
Mc-Graw-Hill.

SNEDDON, I. N., Fourier Transforms.
Mc-Graw-Hill.

SOMMERFELD, A., Partial Differential Equations in Physics.
Academic Press.

TYCHONOV, A. N. y SAMARSKII, A. A., Equations of Mathematical Physics.
Pergamon Press.

VLADIMIROV, V.S., Equations of Mathematical Physics.
Marcel Dekker, Inc. New York, 1971.

VO-KHAC KHOAN, Distributions, Analyse de Fourier, Operateurs aux Derivées Partielles.
Ed. Vuibert 1972

WEINBERGER, H.F., Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Ed. Reverté. 1970.

ZIENKIEWIC, O.C., The finite element method.
McGraw-Hill, New York, 1977.

4.2. LIBROS ELECTRÓNICOS:

PERAL, I., Primer Curso de Derivadas parciales.
http://www.uam.es/departamentos/ciencias/matematicas/docencia/iperal