LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Por Juan Manuel PÉREZ DELGADO

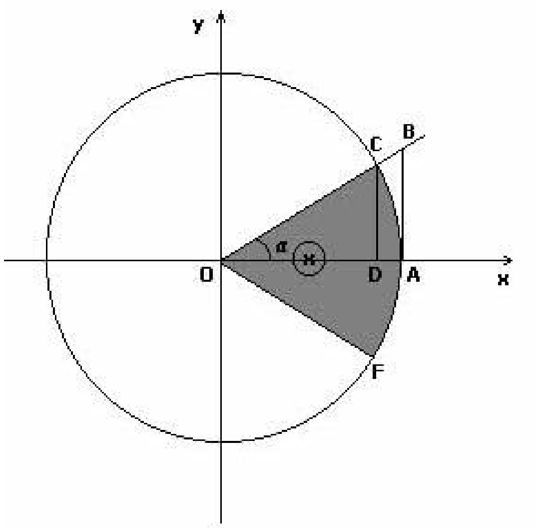
1. **Interpretación geométrica del argumento de las funciones hiperbólicas.**
2. **La definición de las funciones hiperbólicas.**
3. **Fórmulas de la suma y diferencia de argumentos.**
4. **Relaciones entre las funciones hiperbólicas y circulares.**

1. Interpretación geométrica del argumento de las funciones hiperbólicas:

Si en el uso de las funciones circulares el argumento más frecuentemente usado es el "ángulo central AOC = α" con origen en el centro de la circunferencia y medido desde el semieje positivo de abcisas en el sentido contrario a las agujas del reloj, para las funciones hiperbólicas no podemos usar este tipo de argumento porque le faltaría la congruencia geométrica que sí posee en las funciones circulares.

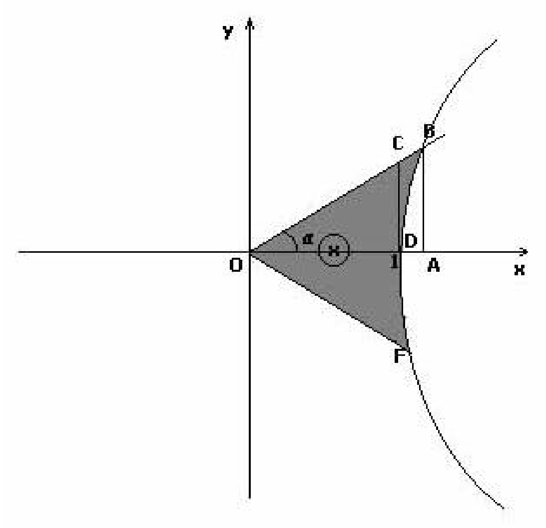
Sin embargo, se podría haber tomado como argumento de las funciones circulares un valor "x", correspondiente al área del sector circular con ángulo central FOC="2α", puesto que de la circunferencia unidad se tiene que:

$$\text{Área } = x = \frac{1}{2}R^2 2\alpha = \alpha = ángulocentralmitad$$



sen x = dis DC = sen α, cos x = dis OD = cos α, tg x = dis AB = tg α

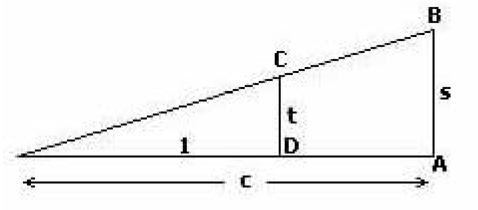
Traduciendo esta idea a la siguiente figura que obtenemos desde la rama derecha de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, se obtendría:



Si llamamos *dis DC = t*, *dis OA = c*, *dis AB = s* se tienen los siguientes hechos:

1º) El punto B, de coordenadas (c,s) pertenece a la hipérbola, luego $c^2 - s^2 = 1$.

2º) Se tiene, por el Teorema de Thales, la relación siguiente:



$$\frac{t}{1} = \frac{s}{c} \implies t = \frac{s}{c}$$

Si ahora calculamos el área x por métodos de cálculo integral, se tiene, con la notación que usamos:

$$Area = "x" = s.c - 2\int_1^c \sqrt{x^2-1}.dx$$

Como una primitiva es $\int \sqrt{x^2-1}.dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}L\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

Se tiene:

$$Area = "x" = s.c - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}L\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^c = s.c - c\sqrt{c^2-1} + L\left|c+\sqrt{c^2-1}\right| =$$

$$= L\left|c+\sqrt{c^2-1}\right|$$

Con lo cual obtenemos que

$$Area = "x" = L\left|c+\sqrt{c^2-1}\right| \qquad [1]$$

De aquí, podemos redefinir la dis OA = c, en función del área x.

$$x = L\left|c+\sqrt{c^2-1}\right| \Rightarrow e^x = c+\sqrt{c^2-1} \Rightarrow e^x - c = \sqrt{c^2-1} \Rightarrow e^{2x} - 2.e^x.c + c^2 = c^2 - 1 \Rightarrow$$

$$e^{2x} + 1 = 2.e^x.c \Rightarrow c = \frac{e^{2x}+1}{2.e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

También, a partir de [1] y de la relación $c^2 - s^2 = 1$:

$$x = L\left|c+\sqrt{c^2-1}\right| = L|c+s| = L\left|\sqrt{s^2+1}+s\right|,$$ luego se obtiene que

$$e^x = \sqrt{s^2+1} + s \Rightarrow e^x - s = \sqrt{s^2+1} \Rightarrow e^{2x} - e.e^x.s + s^2 = s^2 + 1 \Rightarrow$$

$$e^{2x} - 1 = 2.e^x.s \Rightarrow s = \frac{e^{2x}-1}{2.e^x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Y por último, dado que es $t = \frac{s}{c}$:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{\sqrt{c^2-1}}{c} \Rightarrow t.c = \sqrt{c^2-1} \Rightarrow t^2.c^2 = c^2 - 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Además, $s = c.t = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, luego:

$$x = L\left|c+s\right| = L\left|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right| = L\left|\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right| = \left|\sqrt{\frac{(1+t)^2}{1-t^2}}\right| = \left|\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right| = \frac{1}{2}L\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

de donde se tiene:

$$e^{2x} = \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow e^{2x} - e^{2x}.t = 1+t \Rightarrow e^{2x} - 1 = \left(e^{2x}+1\right)t \Rightarrow t = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. La definición de las funciones hiperbólicas:

2.1. Definición:

De lo anterior se tiene que las fórmulas deducidas para las distancias s, c, t son, precisamente, las definiciones formales de las funciones hiperbólicas.

Seno hiperbólico:

$$shx = s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Coseno hiperbólico:

$$chx = c = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tangente hiperbólica:

$$thx = t = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Se observa que, en el campo real, las funciones hiperbólicas son funciones dependientes de la función trascendente elemental e^x.

Esto no ocurre en las funciones circulares que son funciones trascendentes elementales, independientes de la función exponencial, en el campo real.

Sin embargo, como se obtiene por las fórmulas de Euler, en el campo complejo no ocurre así, siendo todas las funciones, circulares e hiperbólicas, dependientes de la función exponencial compleja e^z.

2.2. Fórmulas elementales:

Para las funciones hiperbólicas se cumplen fórmulas análogas a las fórmulas de las funciones circulares:

1) $cthx = \frac{1}{thx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

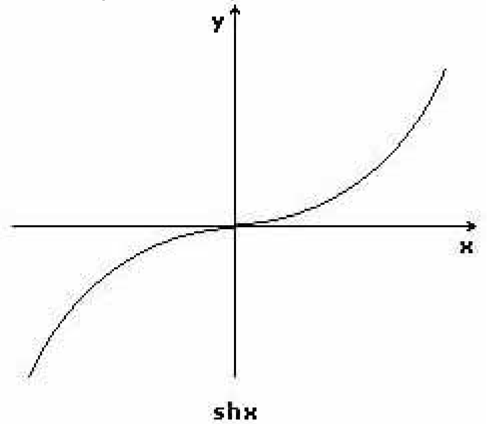
2) $\sec hx = \frac{1}{chx} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

3) $\cos echx = \frac{1}{shx} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

2.3. Dominios y gráficas:

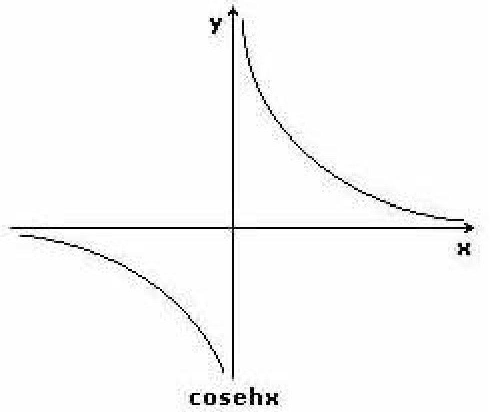
Veamos los dominios y las gráficas de las funciones trigonométricas hiperbólicas:

Seno hiperbólico y su inverso, la cosecante hiperbólica:



$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad Dom(shx) = R$$

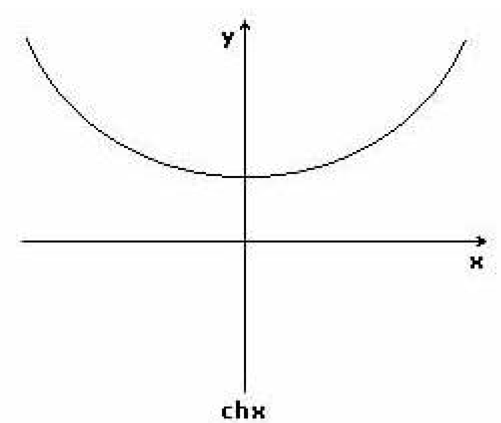
$$sh(0) = 0 \qquad sh(-x) = -shx \quad (IMPAR)$$



$$y = \cos ehx = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

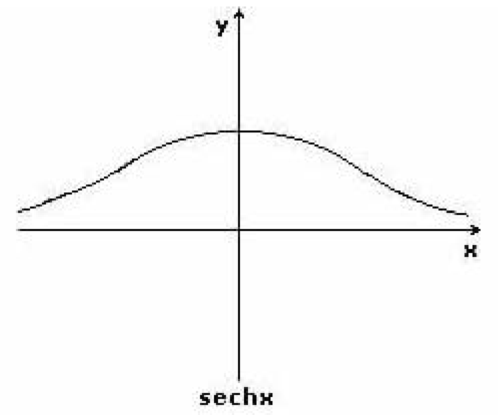
$$Dom(\cos ehx) = R - \{0\}$$

Coseno hiperbólico y su inverso, la secante hiperbólica:



$$y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad Dom(chx) = R$$

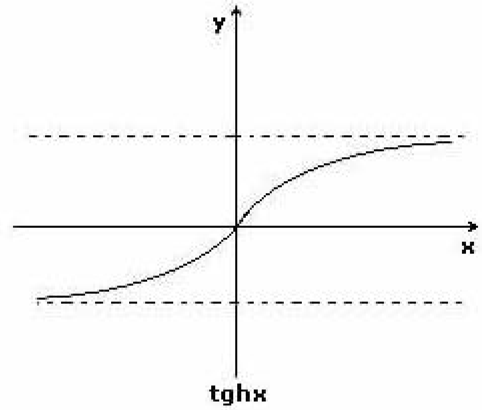
$$ch(0) = 1 \qquad ch(-x) = chx \quad (PAR)$$



$$y = \sec hx = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

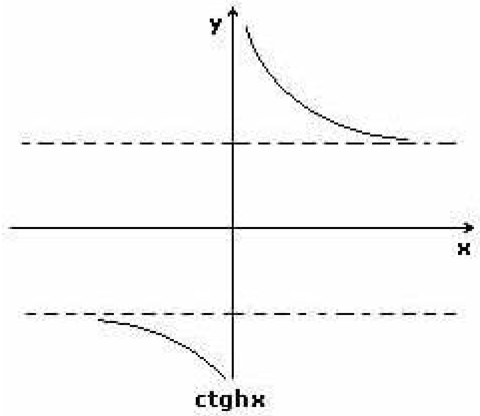
$$Dom(\sec hx) = R$$

Tangente hiperbólica y su inverso, la cotangente hiperbólica:



$$y = thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$Dom(tghx) = R$$



$$y = ctghx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$Dom(ctghx) = R - \{0\}$$

2.4. Otras relaciones:

De la fórmula básica $ch^2x - sh^2 = 1$ se obtienen, por ejemplo, las dos relaciones siguientes:

1) Dividiendo por sh^2x: $ctgh^2x - 1 = \cos ech^2 x$

2) Dividiendo por ch^2x: $1 - th^2x = \sec h^2 x$

Análogamente se obtienen de forma inmediata otras cualesquiera relaciones que permiten expresar una función mediante otra del mismo argumento.

3. **Fórmulas de la suma y diferencia de argumentos:**

Si partimos de las expresiones del seno y coseno hiperbólico para dos argumentos distintos:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

Se tienen las siguientes expresiones de los productos:

$$A = shx.chy = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$
$$B = chx.shy = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$
$$C = chx.chy = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$
$$D = shx.shy = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

Así, se puede deducir de forma algebraica:

$$A + B = shx.chy + chx.shy = \frac{2.e^{x+y} - 2.e^{-(x+y)}}{4} = sh(x+y)$$

O sea:

$$sh(x+y) = shx.chy + chx.shy$$

Del mismo modo, se obtienen de inmediato las relaciones:

$$ch(x+y) = chx.chy + shx.shy$$
$$sh(x-y) = shx.chy - chx.shy$$
$$ch(x-y) = chx.chy - shx.shy$$

Para las fórmulas del argumento doble bastará hacer en las sumas $x=y$, con lo cual

$$sh(2x) = 2.shx.chx$$
$$ch(2x) = ch^2x + sh^2x =$$
$$= 2.ch^2x - 1 = 1 + 2.sh^2x$$

Y de esta última expresión obtenemos las fórmulas del argumento mitad:

$$sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1) \Rightarrow sh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(chx - 1)$$
$$ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1) \Rightarrow ch^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(chx + 1)$$

4. **Relaciones entre las funciones hiperbólicas y circulares:**

Como comentábamos antes –ver página 5-, las funciones trigonométricas en el campo complejo no son independientes de la función exponencial, pues de hecho podemos definir:

$$sen\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ ...$$

$$\cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ ...$$

$$sh\ z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ ...$$

$$ch\ z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ ...$$

Por lo que se deducen algunas relaciones:

$$sh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} . \frac{i}{i} = i.sen\ z$$

O bien, $sen\ z = -i.sh(iz)$

Análogamente, se deducen las siguientes:

$$\cos\ z = ch(iz)$$
$$tg\ z = -ith(iz)$$
$$sh\ z = -isen(iz)$$
$$ch\ z = \cos(iz)$$
$$th\ z = -itg(iz)$$

Estas expresiones para el argumento real x tienen como consecuencias las relaciones de Euler y el poder demostrar, a partir de las fórmulas de la trigonometría circular, las fórmulas de la trigonometría hiperbólica. Veamos, como ejemplo de demostración de este tipo, la fórmula del argumento suma en la trigonometría hiperbólica a partir de la fórmula del argumento suma en la trigonometría circular:

Es decir, partimos de la expresión $sen(x+y) = senx.\cos y + \cos x.seny$ para probar que también es $sh(x+y) = shx.chy + chx.shy$:

$$sh(x+y) = -i.sen\ i(x+y) = -i.sen(ix+iy) = -i.[sen(ix).\cos(iy) + \cos(ix).sen(iy)] =$$
$$= -i.[(i.shx).(chy) + (chx).(i.shy)] = shx.chy + chx.shy$$

En cuanto a la derivación de las funciones hiperbólicas, es inmediato obtener las funciones derivadas a partir de la derivada de la función exponencial elemental e^x:

$$(e^x)' = e^x$$

Así, se tiene, para el seno y coseno hiperbólicos, las derivadas:

$$(shx)' = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = chx$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = shx$$

---oo0oo---