

EL INFINITO MATEMÁTICO

Joaquín González Álvarez

***"Sólo dos cosas son infinitas, el Universo y la estupidez humana, y de la primera no estoy seguro".
Albert Einstein-***

Resumen

Se realiza una exposición sobre el concepto de infinito matemático y se alude a la clasificación de infinito actual e infinito potencial, así como se presentan ejemplos de secuencias, magnitudes y entes geométricos infinitos.

Introducción

Mucho se utiliza el vocablo "infinito" en el habla común y con más frecuencia en el lenguaje literario, pero muy pocas veces con su significado preciso. En un diccionario de la lengua aparece como primera acepción de "infinito" la que se aviene con la etimología: lo que no tiene fin. La palabra infinito la aplicamos la mayoría de las veces incorrectamente, como sinónimo de muy grande o de lo que no percibimos su terminación.

En el presente trabajo me referiré al infinito en su primera acepción o sea como lo que no tiene final. Como antes dije se suele calificar de infinito a lo que es inmensamente grande, así del universo se dice que es infinito y aunque algunas hipótesis como tal cosa lo tienen, teorías como la General de la Relatividad de Einstein, lo consideran finito

Desarrollo

La idea de infinito se nos presenta con mayor claridad al fijarnos en conjuntos como el de los números naturales 1,2,3... cuya serie no tiene final. En los conjuntos infinitos como éste, se presentan paradojas como la de que por ejemplo, los números pares los cuales por supuesto, no son todos los números naturales, también son infinitos. Y a cada número natural le corresponde un número par. Con lo cual paradójicamente hay tantos números pares como números naturales siendo los pares sólo una parte de los números naturales. De los conjuntos cuyos elementos pueden colocarse en correspondencia uno a uno sin que sobre ninguno, esto es en correspondencia biunívoca o biyectiva, se dice que tienen la misma cardinalidad, La cardinalidad sólo depende del número de elementos del conjunto y no de su ordenamiento. El número de elementos se designa por el cardinal de ese conjunto. Por ejemplo el número cardinal de los conjuntos coordinables uno a uno con los conjuntos de cardinalidad cuatro es el

4. Cuando se trata de conjuntos infinitos al cardinal se le denomina cardinal transfinito. De modo que así considerado hay el mismo número cardinal transfinito de números pares que de números naturales en total. Ese número cardinal transfinito lo representan los matemáticos con la letra hebrea aleph, el Aleph de la narración de Borges. Me parece de interés a esta altura de mi trabajo aludir al concepto de número ordinal. Lo haré mediante un ejemplo ya que la definición rigurosa es algo complicada. El conjunto $\{0,1,2,3\}$ corresponde al número ordinal 4 (cuarto) porque: a) su cardinalidad es 4 y b) $0 < 1 < 2 < 3$. A Borges le atraía con singular fuerza el infinito, se advierte en narraciones como la citada y otras como "La muerte y la brújula". En dicho cuento Borges alude sin nombrarla, a la famosa Paradoja de Zenón de Elea o Paradoja de la Dicotomía. En su paradoja, Zenón argumentaba que nada ni nadie podría recorrer completamente un segmento de recta AB, esto es, saliendo de A nadie podría llegar a B. pues primero tendría que recorrer $AC=AB/2$, después $AD=AC/2$ luego $AE=AD/2$, y así infinitas dicotomías que no permitirán recorrer la totalidad del segmento. Al ir tendiendo a cero la longitud de la distancia, el número de dicotomías se hace infinito, el valor de una fracción cuyo denominador tiende a cero se hace infinito. No obstante en matemática se establece que la división por cero no está definida. En la narración un detective analítico al estilo del Dupin de Edgar Poe, plantea a quien pretende asesinarlo, que recorra hasta llegar a él un segmento mediante las dicotomías de Zenón con el propósito (ignorado por su enemigo) de que nunca lo alcance. Atendiendo al concepto de límite del Cálculo Infinitesimal, se infiere que la Paradoja de Zenón de Elea niega el movimiento y es por eso que en lenguaje común, a la tendencia al inmovilismo se le llama *eleatismo*.

Un argumento similar al de la Paradoja de la Dicotomía de Zenón, lo utilizó el escritor Arthur Schnitzler en su novela "Flight to the Darkness", en la cual un personaje sostiene que la muerte no existe, ya que en el último momento se vuelve a vivir a vertiginosa velocidad toda la vida, pero a su vez esa vida rememorada tendrá su propio último momento y así sucesivamente, de modo que se vivirá eternamente. De acuerdo con la teoría de los límites del Cálculo Infinitesimal, cada cual se aproxima a la muerte mas no la alcanza.

Asociado a nuestro tema del infinito, considero oportuno recordar un filme de los catalogables como de ciencia ficción serio que se exhibió hace unos años, titulado Moebius en el que se toma una de las alusiones matemáticas mas ingeniosas a la vez que rigurosa al concepto de infinito.

Para entender el filme se hace necesario explicar las características de una figura geométrica espacial llamada Cinta de Moebius de la cual paso a describir como se construye, De una tira de papel en forma de rectángulo estrecho y alargado, se toman sus extremos con el objeto de unirlos para formar un aro, pero antes de pegarlos, le damos una pequeña torsión a uno de los extremos de modo que su parte inferior pase a ser la superior y entonces los pegamos con goma. Tendremos formada la Cinta de Moebius. Esa cinta tiene una sola cara y no dos como tendría de no estar unidos sus extremos como dije, o como las tiene una hoja de papel cualquiera. Para comprobar esa insólita propiedad, se toma un bolígrafo y desde un punto cualquiera de la cinta se va trazando una línea paralela a sus bordes la cual se va prolongando a lo largo de la cinta hasta que vuelva al punto de partida. Podrá comprobarse que recorre toda la cinta sin que quede una porción de la misma sin recorrer y sin tener que pasar por el borde de una cara a la otra por la sencilla razón de que solo tiene una cara. En el filme se presenta una línea de subway o tren subterráneo en la cual los vagones ruedan y ruedan sin encontrar tope alguno porque esa línea tiene la forma de una Cinta de Moebius. Los pasajeros viajan eternamente sin llegar a paradero alguno. Su viaje no tiene fin su viaje es infinito. Vista de perfil la cinta de Moebius, recuerda la curva llamada Lemniscata de Bernoulli, curiosamente la forma del símbolo ∞ de infinito.

Del infinito decía Aristóteles que "aniquilaba" los números, refiriéndose a lo que ahora se acepta de que el producto de cualquier número por infinito es infinito: $n \times \infty = \infty$. También la suma con infinito es aniquilante en el decir de Aristóteles.

El concepto de infinito se hace mas preciso y aceptable por el intelecto en otras partes de las matemáticas.

Según la Teoría de los Conjuntos de Georg Cantor, existe lo que se llama el infinito actual, algo ya dado como idea que la inteligencia puede captar. El infinito actual lo podemos comprender al pensar en la ya citada serie de los números enteros y positivos: 1, 2, 3, etc., que nuestra mente acepta que no tendrá final, sin que tenga que realizar experimento alguno, el cual por demás es imposible. La idea del infinito actual la aceptan los llamados platonistas y los logicistas como Frege y Bertrand Russell.

Bertrand Russell define el número infinito como una clase reflexiva, lo cual quiere decir que se corresponde término a término a una parte propia de la misma. Así A es un conjunto infinito si siendo B un subconjunto propio de A, existe una correspondencia biunívoca entre A y B. Un ejemplo de reflexibilidad según el filósofo norteamericano Royce sería un mapa *perfecto* de Inglaterra dibujado sobre el suelo de ese país, pues el mismo a su vez tendría dibujado ese tipo de mapa y así en un proceso teóricamente sin final. Se nos ocurre que una maqueta *perfecta* de una ciudad situada en un lugar de la misma, sería un buen ejemplo de reflexibilidad para mostrar el concepto de infinito. Bolzano en su tiempo proponía una idea semejante a la de Russell y Joyce de clase reflexiva como concepto de infinito.

Cantor en sus reflexiones místicas relacionaba el concepto de infinito a la idea de Dios a quien asimilaba con la ideal existencia de un último ordinal simbolizado por Ω a su vez relacionado con el concepto cantoriano de Infinito Absoluto. El Infinito Absoluto de cierta manera recuerda la Idea Absoluta de Hegel. Similares reflexiones que lindan con lo teológico, pero ya no para el infinito matemático, sino lo Infinito en abstracto, hacía San Agustín, Obispo de Hipona, en la Edad Media. San Anselmo en su Principio Ontológico (conocido como Prueba Ontológica de la Existencia de Dios), de cierta manera defiende el concepto de infinito actual al decir "Si la realidad es lo infinito, lo es en estos momentos".

La teoría de Cantor sobre todo en lo que respecta al infinito, fue dura y fanáticamente criticada por Leopold Kronecker, lo cual le ocasionó una lamentable crisis depresiva a su genial autor. Todo ocurrió a finales del siglo XIX y principios del XX.

El infinito se evidencia también mediante fracciones como $\frac{4}{3}$ que al pasarla a decimales dividiendo 4 entre 3 se obtiene 1,3333... y la cifra 3 se repite una y otra vez sin que podamos esperar que alguna vez tenga final esa reiteración. El 3 se repite infinitamente.

Sin embargo los matemáticos que sostienen la tesis de que el infinito actual no existe y sí el infinito potencial aducen que lo que ahora observamos como que no tiene final, tal es el caso del valor de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, el famoso valor π , del cual se han calculado una enorme cantidad de cifras decimales sin que aparezca el valor exacto, pudiera ocurrir, dicen estos matemáticos, que si se sigue buscando quizás aparezca la cifra final y π deje de ser una evidencia del infinito. Sobre la idea de los dos infinitos ya Aristóteles en sus reflexiones sobre el concepto de infinito consideraba la existencia de las dos citadas variantes. Claro está que en el caso de π donde no se encuentra ninguna regularidad en la aparición de las cifras decimales como se observa en su conocido valor aproximado 3,14159..., alguien podría tener la esperanza de que un día aparezca la cifra final, pero no creo que los partidarios del infinito potencial como único infinito, esperen que de momento el valor que antes vimos de $\frac{4}{3}$ esto es, 1,3333...deje de repetir el 3 y aparezca la cifra final que eche a perder nuestro ejemplo de infinito iy el Principio de San Anselmo!.

Conclusiones

Ironías aparte, creo que detenernos a meditar sobre cosas interesantes a la vez que importantes para el riguroso tratamiento de la ciencia, como es el concepto de infinito, nos permite ejercitar la mente en asuntos positivos, cosa útil ante la tendencia a ocuparnos de lo banal que a veces se nos propone.

Bibliografía

Larson, R. 2007. Calculus, Houghton Mifflin Company. New York.

González, J. 2001 Ciencia, Arte, y Literatura. Ediciones Holguín.

González, J. 2003. Ciencia, Literatura, Arte...y Filosofía. Libro virtual.

<http://galeon.com/casanchi/lib/virtuales.htm>

Borges, J. L. 1988, Páginas Escogidas. Casa de las Américas. La Habana.

Ortiz, J. R. 1994. El Concepto de Infinito. Asociación Matemática Venezolana. Boletín. Vol. 1. Número 2.

..

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com