

**EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE  
LA VERSIÓN DE MOIVRE-LAPLACE**

Aleksander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) dio en el año 1901 una demostración en condiciones muy generales de este gran teorema de la Estadística, que había sido ya enunciado por el Pierre Simon Laplace en 1812.

Antes de la demostración de Lyapunov, Lindeberg había probado ya una importante condición de suficiencia para su verificación. Finalmente, los trabajos de Féllér, Kintchine y Levy han resuelto el problema de encontrar las más generales condiciones de validez para el Teorema Central del Límite.

El Teorema Central del Límite viene a precisar la Ley de los Grandes Números, y su forma más elemental es el conocido Teorema de Moivre-Laplace, que se deduce fácilmente del Teorema de Levy-Lindeberg.

Hoy día, una versión muy simple del teorema se presenta de forma intuitiva a los estudiantes de los últimos cursos de la Educación Secundaria del Bachillerato español, dentro de las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

**LAS SUCESIONES ASINTÓTICAMENTE NORMALES Y EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE:**

Podemos enunciar el teorema desde el concepto de sucesión asintóticamente normal. Veamos, pues, en primer lugar qué es lo que llamamos sucesiones de variables aleatorias asintóticamente normales:

Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de variables aleatorias tales que existen sucesiones numéricas  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  que verifican que

$$Y_n = \frac{X_n - A_n}{S_n}$$

Entonces, si las funciones de distribución  $F_n(x)$  de las  $Y_n$  verifican que tienden a la función normal  $N(0,1)$  en el límite, es decir, si se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} .dt$$

diremos que la sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es asintóticamente normal  $N(A_n, S_n)$ , y que la sucesión  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  es asintóticamente normal  $N(0,1)$ .

El Teorema Central del Límite afirma que para una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  sujeta a condiciones muy generales (especificadas por cada teorema particular), la variable aleatoria

## **EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE. LA VERSIÓN DE MOIVRE-LAPLACE**

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - A_n}{S_n}$$

donde son  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  un par de sucesiones numéricas convenientes, es asintóticamente normal  $N(0,1)$ , cumpliéndose además que si es  $M_k = E[X_k]$  y es  $D_k = D[X_k]$  (Media y Desv. Típica), entonces es  $A_n = \sum_{k=1}^n M_k$  y  $S_n = D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]$ .

### **LA VERSIÓN ELEMENTAL DEL TEOREMA. EL TEOREMA DE MOIVRE-LAPLACE:**

Desde la definición de función característica y el resultado clásico de convergencia de funciones características llamado Teorema de Levy-Cramer, podemos probar fácilmente el conocido teorema de Moivre-Laplace, con el paso previo de la prueba del Teorema de Levy-Lindeberg.

- Funciones características. Teorema de Levy-Cramer:

Para una distribución continua de probabilidad de función de distribución dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x).dx$$

se define la función característica  $\varphi(t)$  por la expresión

$$\varphi(t) = E(e^{ixt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \cdot f(x).dx$$

que en el caso de la distribución normal  $N(\mu, \sigma)$  tiene la forma:

$$\varphi(t) = E(e^{ixt}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} .dx$$

que, al resolver la integral, nos da:  $\varphi(t) = e^{i\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 (it)^2}$ , y si se trata de la distribución normal  $N(0,1)$  será:  $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Para una sucesión  $\{\varphi_n(t)\}_{n \geq 1}$  de funciones características se verifica el llamado *Teorema de Levy-Cramer*:

“La sucesión de Funciones de Distribución  $\{F_n(x)\}_{n \geq 1}$  converge hacia una Función de Distribución  $F(x)$  en todo punto de continuidad de  $F(x)$  si la sucesión de funciones características  $\{\varphi_n(t)\}_{n \geq 1}$  de las  $F_n(x)$  converge para  $n \rightarrow \infty$  hacia una función  $\varphi(t)$  continua en  $t=0$ . En este caso,  $\varphi(t)$  es la función característica de  $F(x)$  y las  $\varphi_n(t)$  convergen hacia  $\varphi(t)$  en todo intervalo finito”.

- Teorema de Levy-Lindeberg:

**EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE. LA VERSIÓN DE MOIVRE-LAPLACE**

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias mutuamente independientes que tienen la misma distribución, esto es, la misma media  $M$  y la misma desviación típica  $D > 0$ . Se cumple entonces que la variable aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - M}{D\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nM}{D\sqrt{n}}$$

es asintóticamente normal  $N(0,1)$ .

Demostración:

- Consideremos primero la función característica de la variable aleatoria  $X_k - M$ :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(X_k - M)} \cdot dF(X_k) = e^{it \cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot D^2 \cdot t^2 \cdot i^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2} D^2 t^2 + o(t^2)$$

siendo  $o(t^2)$  una función tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$

- Consideremos también la función característica de la variable  $\sum_{k=1}^n \frac{X_k - M}{D\sqrt{n}}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it \sum_{k=1}^n \frac{X_k - M}{D\sqrt{n}}} \cdot dF(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{t}{D\sqrt{n}} (X_k - M)} \cdot dF(X_k) = \prod_{k=1}^n \varphi\left(\frac{t}{D\sqrt{n}}\right) = \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2} \cdot D^2 \cdot \left(\frac{t}{D\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{D\sqrt{n}}\right)\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

O sea, haciendo  $N = \frac{t^2}{2} - n \cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ , se tiene que  $\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{n/N}\right)^n$

Y, además, se tiene para su límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N = \frac{t^2}{2} - t^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(t^2/n)}{t^2/n} = \frac{t^2}{2} - 0 = \frac{t^2}{2}$$

por tanto, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n/N}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n/N}\right)^{-n/N}\right]^{-N} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} N} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

es decir, la sucesión  $\{\varphi_n(t)\}_{n \geq 1}$  de las funciones características de las Funciones de Distribución  $\{F_n(x)\}_{n \geq 1}$  converge hacia la función característica de la distribución normal  $N(0,1)$ , por lo que, aplicando el Teorema de Levy-Cramer, la sucesión

## **EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE. LA VERSIÓN DE MOIVRE-LAPLACE**

$\{F_n(x)\}_{n \geq 1}$  converge hacia  $F(X)$ , función de distribución de la normal  $N(0,1)$ , lo cual indica que la variable aleatoria

$$U_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - M}{D\sqrt{n}}$$

es asintóticamente normal  $N(0,1)$ .

- El Teorema de Moivre-Laplace:

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias mutuamente independientes con el mismo rango  $\{0, 1\}$ , la misma distribución y tal que  $p[X_k = 1] = p$  y también  $p[X_k = 0] = q = 1 - p$ . Entonces, la variable aleatoria  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$  es asintóticamente normal  $N(np, \sqrt{npq})$ , o, de otra forma, la variable aleatoria

$$U_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$$

es asintóticamente normal  $N(0,1)$ .

Demostración:

Puesto que es  $M = np$  y  $D = \sqrt{npq}$ , el teorema se reduce al anterior teorema de Levy-Lindeberg.

### **BIBLIOGRAFÍA:**

CRAMER, Métodos Matemáticos de la Estadística, Aguilar.  
GNEDENKO, The Theory of Probability, Chelsea.  
PARZEN, Modern Probability Theory, Jhon Wiley

Carlos S. CHINEA  
casanchi@teleline.es