

# TRATAMIENTO DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

Joaquín González Álvarez

## Conceptos y métodos generales

Se llama dinámicos a aquellos sistemas que experimentan variaciones de sus valores, cantidades o propiedades, con el tiempo. Dichos sistemas pueden ser físicos, químicos, biológicos, sociológicos, etc. Nos ocuparemos de los que su variación con el tiempo puede expresarse por sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, \dots) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z, \dots) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots\end{aligned}$$

aunque en este trabajo al principio sólo nos ocuparemos de sistemas de dos variables solamente en aras de simplificar la explicación.

La mayor parte de las veces, la resolución de las ecuaciones diferenciales correspondientes no será posible por los métodos matemáticos exactos, por lo que se procederá sólo a encontrar elementos que ayuden a bocetar las trayectorias fásicas mediante las cuales determinar puntos estacionarios, averiguar periodicidad de los procesos etc.

. Para ello necesitamos, no obstante recordar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales por el momento lineales, aunque luego nos ocuparemos detenidamente de los no lineales que serán los que mas nos interesen.

Tomemos como ejemplo el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

que puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como se conoce, la solución tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
 x &= A \cdot \exp \lambda_1 t + B \cdot \exp \lambda_2 t \\
 y &= C \cdot \exp \lambda_1 t + D \cdot \exp \lambda_2 t \\
 &\quad (t \text{ tiempo})
 \end{aligned}$$

donde las  $\lambda$  se calculan por los valores propios mediante:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollado da:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

haciendo la traza  $a + d = t$  y el determinante  $ad - bc = d$ , se tiene:

$$\lambda^2 - t\lambda + d = 0, \text{ con sus soluciones:}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{\left[ t + (t^2 - 4d)^{1/2} \right]}{2} \\
 \lambda_2 &= \frac{\left[ t - (t^2 - 4d)^{1/2} \right]}{2}
 \end{aligned}$$

Los signos de  $\lambda$  sustituidas éstas en las soluciones de  $x$  e  $y$  obtenidas anteriormente, determinarán si las curvas exponenciales correspondientes lo son de crecimiento (signo mas) o decrecimiento (signo menos) de los valores de  $x$  e  $y$ , Dichas ecuaciones de  $x$  e  $y$  con parámetro  $t$ , servirán para trazar las trayectorias fásicas en un sistema de coordenadas  $xy$  conformando el retrato fásico del sistema dinámico (  $dx/dt, dy/dt$  ).

Dada la muy frecuente dificultad de resolver las ecuaciones diferenciales, se acude a métodos gráficos como el ir hallando los valores de la pendiente  $dy/dx$  en varios puntos del espacio fásico y en cada punto trazar una pequeña saeta en el sentido que indique el valor de la pendiente  $y$ . de esa manera, tener una idea del retrato fásico. El conjunto de saetas constituyen el campo vectorial del sistema. Se procede luego a situar los puntos estacionarios, o sea, de los puntos donde  $dx/dt = 0$  y  $dy/dt = 0$ . Si las trayectorias fásicas tienden a converger en un punto estacionario, éste será un punto estable, o sea, un punto en el que pequeñas variaciones del estado del sistema no impedirán que este vuelva a su estado inicial. Los puntos estacionarios estables reciben también el nombre de atractores, el cual resulta muy utilizado en dinámica. Todo lo contrario ocurrirá cuando las trayectorias fásicas tiendan a alejarse de un punto estacionario, éste será inestable, pequeñas variaciones del estado del sistema harán que éste no vuelva a su estado inicial. Los acercamientos y alejamientos de las trayectorias fásicas los determinarán los signos de las  $\lambda$  por razones similares a las antes explicadas para las soluciones de  $x$  e  $y$ . A su vez, como es obvio, esos signos vendrán determinados por los valores de la traza  $t$  y del determinante  $d$ .

Veamos ahora el procedimiento a seguir con los sistemas dinámicos no lineales, esto es, en los que las variables pueden estar afectadas por exponentes diferentes de 1 o estar multiplicadas entre sí, y que son los mas frecuentes en los sistemas reales.

Mucho de lo visto hasta aquí nos servirá, pero antes de seguir adelante observemos de nuevo el sistema lineal que antes vimos:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Fijémonos en la matriz del segundo miembro. Si siguiendo con la notación general que adoptamos desde las primeras líneas, hacemos

$$\begin{aligned} f &= ax + by \\ g &= cx + dy \end{aligned}$$

veremos que  $\partial f/\partial x = a$ ,  $\partial f/\partial y = b$ ,  $\partial g/\partial x = c$ ,  $\partial g/\partial y = d$  con lo que podríamos sustituir la matriz por el jacobiano (ver "Non Linear Dynamics and Chaos", S.H. Strogatz, 2000):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Cuya traza  $t$  y determinante  $d$ , se puede demostrar que cumplen la misma función que sus homónimas antes vistas para determinar los signos de las  $\lambda$  y por tanto el sentido de las trayectorias fásicas y la clasificación de los puntos estacionarios como estables e inestables y otras características de los mismos, aún en los sistemas no lineales. Entre estas otras características tenemos la clasificación de los puntos estacionarios ya sean estables o inestables, en nodos y focos. En los nodos se cumplirá que  $t^2 - 4d$  mayor que cero y en los focos  $t^2 - 4d$  menor que cero. En los focos las trayectorias fásicas tienen forma de espiral que se dirigen al foco cuando éste es estable y se alejan de él cuando es inestable. En ambos casos se producen oscilaciones que pueden ser no amortiguadas de frecuencia  $d^{1/2}$  cuando  $t = 0$  y cuando el foco es inestable o se enrolla en un ciclo límite. Cuando el foco es estable las oscilaciones son amortiguadas.

Tanto los nodos como los focos son estables cuando  $t$  menor que cero e inestables cuando  $t$  mayor que cero. En ambos casos  $d$  será mayor que cero. Cuando  $d$  es menor que cero el punto estacionario se llama asiento o silla y en ese caso las trayectorias fásicas no salen ni entran al punto estacionario sino que se acercan a él en forma semejante a ramas de una hipérbola.

Visto lo anterior, vamos aplicar los métodos de la dinámica no lineal a un proceso que se presenta en un modelo didáctico ideal llamado Brusselator consistente en una reacción química en la que se producen situaciones características de sistemas dinámicos abiertos, autorregulados lejos del equilibrio, situaciones que también se dan en los organismos vivos en los cuales se alcanza el orden dinámico en condiciones de no equilibrio.

Es una reacción autocatalítica en la que se producen sustancias intermedias cuyas concentraciones variables las representaremos por  $x$  e  $y$  las cuales varían con el tiempo según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} dx/dt &= 1 - (b+1)x + ax^2y \\ dy/dt &= bx - ax^2y \end{aligned}$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros.

Como indicamos antes calculamos los puntos estacionarios igualando a cero los segundos miembros. Obtenemos un solo punto de coordenadas  $x^*=1, y^*=b/a$ . Hallamos el jacobiano  $J$  buscando  $\partial f/\partial x$ , etc evaluándolas para  $x=1$  e  $y=b/a$  y obtenemos:

$$J = \begin{bmatrix} b-1 & a \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

Calculamos  $t = b - (a + 1)$        $d = a$ .

Luego  $t^2 - 4d$  que llamaremos  $D$ .

Si  $a$  mayor que cero con  $b$  mayor que  $a+1$  y  $D$  mayor que cero tendremos nodo inestable pero si  $b$  menor que  $a+1$  nodo estable. Pero si  $D$  menor que cero con las otras condiciones, entonces en vez de nodos tendríamos focos. En el caso de foco inestable se producirían autooscilaciones no amortiguadas que podrán ser observadas por variaciones periódicas de la coloración de las sustancias de la reacción. Si  $b = a+1$ , será el valor crítico de  $b$ . El paso de los valores de  $b$  crítico hacia valores un tanto mayores o un tanto menores de éste, provocan un cambio en la naturaleza de los puntos estacionarios lo cual se conoce como bifurcación.

Hemos visto así un caso típico de sistema abierto, alejado del equilibrio que llegado a un punto de inestabilidad puede pasar en determinadas condiciones a autoorganizarse, en este caso ordenándose en el tiempo con oscilaciones no amortiguadas. La autoordenación de este tipo de sistema pudiera darse también en el espacio, todo lo cual se logra manipulando adecuadamente los parámetros.

Pondremos otro ejemplo ahora de la bioquímica-física específicamente de genética: la acción del código genético portado por el ADN para que por medio del ARNm determine la secuencia de aminoácidos en las proteínas.

El sistema dinámico tiene la forma:

$$\begin{aligned} dx/dt &= -ax + y \\ dy/dt &= x^2/(1+x^2) - by \end{aligned}$$

donde  $x$  e  $y$  son las concentraciones de la proteína y el ARNm y  $a$  y  $b$  parámetros.

Los puntos estacionarios se buscan como indicamos igualando los segundos miembros a 0; serán tres. Luego se determinan los jacobianos para cada punto estacionario y mediante el análisis ya explicado de la traza y el determinante, en cada caso se encontrará que hay dos nodos estables y un punto de ensillaje. El bioquímico-físico sabrá manejar estos resultados e interpretarlos.

A veces el problema dinámico se nos plantea a partir de la expresión de la ley fundamental de la dinámica para el caso que se trata. Por ejemplo para el oscilador armónico amortiguado:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

En este caso se hace  $dx/dt=y$  con lo que la segunda derivada de  $x$  se hará  $dy/dt$  y así tendremos el sistema en la forma habitual:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -kx - by \end{aligned}$$

y se seguirá el procedimiento explicado.

Antes de seguir adelante con la dinámica de sistemas de dos variables o bidimensionales nos referiremos brevemente a los sistemas unidimensionales, esto es los de la forma  $dx/dt=f(x)$ . En este caso el retrato fásico se sitúa en el plano cartesiano  $x, dx/dt$  y las trayectorias fásicas se plotean a partir de  $f(x)$  tomando como variable independiente a  $x$ . Los puntos estacionarios  $x^*$  análogamente a lo que ya sabemos, se hallarán a partir de  $dx/dt=0$  con lo que estarán localizados sobre el eje  $x$ . Serán estables cuando la trayectoria fásica va hacia ellos e inestables en caso contrario como ya habíamos visto. Como es obvio en los puntos estables  $f'(x)$  menor que cero y en los inestables  $f'(x)$  mayor que cero.

Un ejemplo de sistema unidimensional es el que describe la variación poblacional de una especie animal dado por la llamada ecuación logística:

$$dx/dt = kx(1 - x)$$

Seguindo lo explicado vemos que los puntos estacionarios son  $x^*=0, x^*=1$ .

La derivada de  $f$  respecto a  $x$  es  $f'(x)=k-2kx$  que evaluada para  $0$  es positiva y por tanto ese punto es inestable. Lo contrario ocurre al evaluar para  $1$ .

Un fenómeno muy interesante y conocido es el de la formación de una estructura conocida como Celdas de Bénard, que se produce en un líquido al ser calentada la base del recipiente que lo contiene. El líquido en el fondo en proceso convectivo se eleva hasta la superficie y para ciertos valores de los parámetros del sistema unidimensional que describe su dinámica se llega a una inestabilidad que propicia el paso a una autoordenación dinámica en el espacio apareciendo las celdas. El sistema unidimensional tiene la forma:  $dx/dt = ax - bx^3$ , para el análisis de los puntos estacionarios:  $f'(x) = a - 3bx^2 = 0$ . Un punto crítico será cuando  $a = 3bx^2$  y para el punto estacionario  $x=1$  se producirá la inestabilidad antes citada cuando  $a$  mayor que  $3b$ . A esta situación se le llama Inestabilidad de Bénard.

### Ciclos límites

Resulta conveniente conocer porqué la presencia de  $\exp i\theta$  en las soluciones de  $x$  e  $y$  en función del tiempo, indica oscilaciones (La presencia de  $i\theta$  se deberá a que la traza y el determinante del Jacobiano cumplirán que  $t^2$  menor que  $4d$ ). Para ello debemos recordar la ecuación de Euler  $\exp i\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ . La presencia de las funciones seno y coseno nos indica la periodicidad de los valores.

Ya mencionamos los ciclos límites que resultan cuando una trayectoria fásica en forma de espiral, acaba por enrollarse conformando una trayectoria cerrada. Se comprende que recorriendo la trayectoria los puntos fásicos se van repitiendo periódicamente indicando el comportamiento oscilatorio del sistema. El concepto ciclo límite es muy importante en dinámica. Los ciclos límites pueden atraer trayectorias cercanas hacia él o por el contrario repelerlas. En el primer caso estamos ante otro tipo de atractor.

Los ciclos límites estables son muy importantes en la ciencia ya que modelan los sistemas dinámicos reales que presentan procesos oscilatorios autosostenidos tales como latidos cardíacos, ritmos biológicos, reacciones químicas oscilantes y otros muchos ejemplos de la materia viva e inerte.

No toda trayectoria u órbita cerrada es un ciclo límite ya que ésta tiene que ser aislada..Cuando del jacobiano del sistema obtenemos que  $t^2$  es menor que  $4d$  y  $t=0$ , indica órbitas cerradas pero no aisladas por lo que no hay ciclo límite.

Veamos el análisis de sistemas en los que se presentan ciclos límites del tipo de Liénard:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -f(x)dx/dt - g(x) \end{aligned}$$

como es el del famoso oscilador de Van der Pol utilizado en los primeros radios de válvulas al vacío y que motivaron los mas importantes estudios de sistemas dinámicos no lineales, el cual se expresa así:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -\mu(x^2 - 1)dx/dt - x \end{aligned}$$

que recuerda el del movimiento oscilatorio amortiguado:

$$dx/dt = -bdx/dt - x$$

aunque éste es lineal.

La peculiaridad y ventaja del de Van der Pol es que en éste al pasar el valor modular de x de ser menor que 1 a mayor que 1 la acción amortiguadora varía su efecto coadyuvando a la autosustentación de las oscilaciones.

Unas líneas mas arriba hemos escrito el sistema no lineal de Van der Pol y vamos analizarlo con el método que ya conocemos.

Encontramos el punto estacionario igualando los segundos miembros del sistema acero y hallamos que es (0,0) o sea el origen de coordenadas.

Calculamos el jacobiano para (0,0):

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $t=1$ ,  $d=1$  y  $t^2 - 4d$  menor que cero vemos que es un foco inestable. Veamos ahora si se presenta un ciclo límite para lo cual aplicaremos el Teorema de Liénard que conlleva los siguientes pasos. Siguiendo la notación que adelantamos cuando presentamos el sistema de Liénard haremos  $\mu(x^2 - 1) = f$ . Si la expresión que resulta de  $\int f dx$  se hace cero

para un único valor positivo, el sistema tendrá una órbita cerrada rodeando el punto estacionario Veamos si es así en nuestro caso:  $\int \mu(x^2 - 1) dx = 0$ , en efecto:

$x = 3^{1/2}$  único valor positivo que lo cumple, por tanto para el sistema de Van der Pol habrá una órbita cerrada rodeando el origen de coordenadas.

### **Caos y complejidad**

En el espacio fásico no puede ocurrir la intersección de dos trayectorias fásicas. En el de  $n=2$  donde n número de ecuaciones diferenciales del sistema, tal cosa implica que, en virtud de uno de los mas importantes teorema de la dinámica, el de Poincaré-Bendixon, una trayectoria fásica en una región limitada del plano en el cual no hay atractores terminará enrollándose en una órbita cerrada.

Con  $n$  igual o mayor que 2, no se cumple el Teorema de Poincaré- Bendixon, y una trayectoria física puede estar por siempre desarrollándose en una región limitada sin asentarse bajo ningún atractor de los descritos hasta ahora, pudiendo ocurrir que para ciertos valores de los parámetros del sistema, sea atraída hacia un complicado objeto geométrico con ciertas características llamadas de fractales de los que mas adelante nos ocuparemos. Ese objeto se conoce como atractor extraño y cuando se llega a esa situación se dice que el sistema ha llegado a régimen de caos.

En un sistema en régimen de caos muy pequeñas variaciones de las condiciones iniciales, esto es de sus variables, dan lugar a grandes cambios en los valores de las mismas.

La teoría del caos, entendido como lo hemos presentado en el párrafo anterior, el estudio de los fractales, y la termodinámica de los procesos de no equilibrio en sistemas abiertos, se engloban en la llamada Teoría de la Complejidad, que en general estudia los sistemas en los que aparecen propiedades emergentes que son aquellas que presentan los colectivos al integrarse y que no presentaban sus componentes cuando se encontraban aislados. Otra característica de los sistemas de comportamiento complejo es que su grado de complejidad se mide por la longitud en bits del programa que lo define.

La complejidad en el proceso de formación y evolución de la materia viva experimenta un crecimiento de su complejidad y por ende de su ordenamiento en aparente contradicción de la segunda ley de la termodinámica. Pero es el caso que el ser vivo es un sistema abierto y su ordenamiento no se produce como en la cristalización, por descenso de temperatura sino porque su entropía sale al medio exterior, es un proceso de la termodinámica de no equilibrio. Ese ordenamiento es dinámico con características de transición de fase pero no equilibrada.

Un proceso biológico fundamental como es la glicólisis, constituye un ejemplo de ordenamiento dinámico. Mediante la glicólisis las células obtienen energía de los glúcidos. El tratamiento por los métodos de la dinámica no lineal se efectúa a partir del sistema:

$$\begin{aligned} dx/dt &= -x + ay + x^2 y \\ dy/dt &= b - ay - x^2 y \end{aligned}$$

donde  $x$  e  $y$  son las concentraciones de las sustancias involucradas en este sistema en el cual, dados los pasos ya vistos de hallar puntos estacionarios, jacobiano, traza y determinante se llega a que para ciertos valores de los parámetros, el punto estacionario es un foco inestable que conllevará a un ciclo límite y la consiguiente aparición de oscilaciones sostenidas, esto el ordenamiento dinámico en el tiempo. La termodinámica de no equilibrio constituye un poderoso instrumento teórico de investigación a partir de los aportes de Ilya Prigogine.

Pero volvamos al caos. Las principales características del comportamiento de los sistemas que pueden alcanzar régimen caótico, pueden estudiarse a partir del sistema dinámico dado por las ecuaciones de Lorenz:

$$\begin{aligned} dx/dt &= s(y - x) \\ dy/dt &= rx - y - xz \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned}$$

donde  $s$  número de Prandtl,  $r$  número de Rayleigh y  $b$  constante que tiene que ver con los procesos convectivos de fluidos. Éstos son los parámetros del sistema que al alcanzar los valores  $s=10$ ,  $b=8/3$  y  $r=28$ , el sistema presentará las características antes citadas del caos.

La trayectoria física evolucionará en el espacio tridimensional adoptando una espectacular conformación que aparenta una figura como las alas de un díptero que parecen en un visionaje

de muy poca resolución, unirse por sus bases pero en realidad constituyen un complejo de superficies que adoptan una configuración fractal, esto es, configuran un atractor extraño conocido como atractor de Lorenz,

No obstante la idea que hemos dado del caos mediante ecuaciones diferenciales, resulta mas ilustrativo a la vez que muy atractivo el método de los mapas iterativos del cual pasamos a ocuparnos.

### **La teoría del caos mediante mapas iterativos**

Se dice que un sistema físico, químico, social, económico, o de otra índole, se encuentra en régimen de caos, cuando muy pequeñas variaciones de las condiciones iniciales ( valor de las variables del sistema ) dan lugar a notables diferencias en los valores de las variables. Además, si los valores antes de alcanzar la situación de caos, se estabilizaban en un valor o en un conjunto de ellos, ya en el caos no ocurrirá eso.

Veamos un enfoque matemático del caos, utilizando la relación iterativa conocida como mapa logístico:

$$x \rightarrow kx(1-x)$$

Aplicándolo al estudio del aumento o disminución del número de ejemplares de una especie animal que se encuentran en determinada condición de alimentos, clima, etc.

Se empieza por un valor inicial del número de ejemplares que se sustituye en el segundo miembro del mapa logístico y se halla el valor de la  $x$  del primer miembro. Con ese valor obtenido se repite una y otra vez el proceso o sea se continúa la iteración La constante  $k$  es la tasa de crecimiento que depende de las condiciones ambientales etc.

Comencemos los ejemplos con  $k=2$  y un valor inicial  $x=0.8$  ( quiere decir 0.8 millares de ejemplares). Se comprobará que cuando se llegue a  $x=0.5$  y se trate de seguir la iteración, se repetirá el 0.5, se dice que se ha llegado a un atractor, la población. se queda en ese valor, se estabiliza en ese valor.

Hagamos ahora  $k=3$  y comencemos por 0.635, al dar  $x=0.694$  y seguir la iteración, se repetirá esta pareja de números una y otra vez Ahora el atractor es mas complicado, cuando es de mas de un número se dice que el atractor es un ciclo. Este es un ciclo de período 2 por ser de dos valores.

Probemos con  $k=3.5$  y empecemos con  $x=0.383$ , veremos que cada cuatro valores se repiten y así se siguen repitiendo; ahora es un ciclo de período 4 el atractor.

Pero con  $k=4$  ya no hay atractores de ningún tipo, el sistema ha llegado a situación de caos. Sin embargo, aún en situación de caos, los valores se mantienen dentro de una estructura a la que se le ha dado el nombre de "atractor extraño" nombre que considero desafortunado pues esa estructura no tiene las propiedades de los atractores que vimos antes de llegar al caos.

La sensibilidad a las pequeñas variaciones de los valores iniciales pueden comprobarse con  $k=4$  o sea ya en el caos. Con valor inicial  $x=0.6$  e iterando varias veces y luego haciendo lo mismo con  $x=0.61$ . Se verá que las series obtenidas son bastante diferentes. Esto fue lo que motivó a Edward Lorenz a idear la Teoría del Caos.

A los valores de  $k$  para los cuales cambia el período del ciclo (antes del caos claro está) se les llama puntos de bifurcación. Vimos que para  $k=3$  se duplicó el período, esta duplicación del

período se va produciendo para determinados valores de  $k$  así el período se hará 4 para  $k=3.449\dots$ , se hará 8 para  $3.54409\dots$  y así para correspondientes valores de  $k$ . Feigenbaum encontró una regularidad en la sucesión de los valores de  $k$  para la duplicación del período. Si a cierto valor de  $k$  le llamamos A, al anterior B y al que le sigue C, Feigenbaum encontró que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A-B)/(C-A)}{(B-A)/(C-B)} = 4,669\dots$$

### El caos y los fractales

Ya llegando al caos los ciclos son de un período enorme, tienden a infinito. Si se representaran los valores de un ciclo ya "a las puertas del caos" por puntos en un eje de coordenadas, los infinitesimales segmentos que determinarían esos puntos, configurarían aproximadamente lo que se llama el Fractal de Cantor, figura que se obtiene por un procedimiento gráfico reiterativo de acuerdo a la definición de fractal dada por Benoit de Mandelbrot. El procedimiento para el Fractal de Cantor es el siguiente. Un segmento rectilíneo se divide en tres partes y se suprime la del medio. Esta operación se va repitiendo en cada porción de segmento que vaya resultando. Según la Teoría de los Fractales de Mandelbrot, la dimensión de los fractales es fraccionaria.

Vemos pues que aún en el caos hay una tendencia al orden ya que un fractal presenta una especie de ordenamiento que se manifiesta en que cualquier porción de la figura es una réplica de la figura total.

La fraccionalidad de la dimensión de los fractales se evidencia en el estudio de uno de los más famosos, el fractal de Koch, pero antes debemos dar el concepto de dimensión de Hausdorff. Imaginemos un cubo de arista de longitud  $l$ . Si dividimos cada arista en 2 partes el cubo quedará dividido en 8 partes iguales. El número de dimensiones del cubo viene dado por la llamada dimensión de Hausdorff que se calcula por el exponente al cual hay que elevar el número de partes en que se dividió la arista para que de el número de partes en que quedó dividido el cuerpo. En el caso del cubo será el exponente al que hay que elevar 2 para que de 8 o sea 3 como es sabido. La fórmula para calcular la dimensión de Hausdorff la obtenemos como una generalización del procedimiento seguido para el cubo. Si llamamos  $D$  a la dimensión,  $n$  al número de partes en que se dividió la arista y  $N$  al número de partes en que quedó dividido el cuerpo, se tendrá:  $D \log n = \log N$  y por tanto  $D = \log N / \log n$  que para el cubo es.

$$D = \log 8 / \log 2 = 3.$$

El fractal de Koch se traza del siguiente modo. Un segmento se divide en 3 partes. Sobre el segmento parcial del medio levantamos un triángulo equilátero y borramos su base. Repetimos una y otra vez la misma operación en cada segmento teóricamente hasta el infinito. Veamos su dimensión aplicando la fórmula de Hausdorff:  $N=4, n=3$  y  $D = \log 4 / \log 3 = 1.2618$ , un número fraccionario de dimensiones.

Una variante del fractal de Koch es el Copo de Nieve de Koch el cual se obtiene aplicando el mismo procedimiento del fractal a cada lado de un triángulo equilátero. Con la repetición del procedimiento en cada segmento resultante teóricamente hasta el infinito, el perímetro del Copo tiende a infinito. Se tendrá el paradójico caso de un perímetro infinito encerrando un área finita. Otra peculiaridad de los fractales es que cada porción de uno de ellos reproduce la forma del fractal completo a una escala cada vez menor.

Un fractal muy famoso es el de Sierpinski. Su construcción se efectúa a partir de un triángulo equilátero. Con vértice en los puntos medios de sus lados se traza otro triángulo el cual se borra. El mismo procedimiento se aplica a cada uno de los triángulos que quedan una y otra vez.

Para calcular su dimensión aplicamos la fórmula de Hausdorff con  $n=2$  y  $N=3$  con lo que obtenemos  $D=1,584$ .

Del fractal de Cantor también conocido como Conjunto de Cantor y Polvo de Cantor ya hemos hablado. Para calcular su dimensión de Hausdorff hay que tomar  $n=3$  y  $N=2$  con lo que obtenemos  $0,63$ .

Fractales como los anteriores se construyen mediante un algoritmo como hemos visto, pero otros como los de Mandelbrot y Julia se trazan determinando puntos en el plano obtenidos por iteración de expresiones del tipo  $z_2 = z_1^2 + c$  donde la  $z$  y la  $c$  representan números complejos  $a+bi$  donde  $i$ , unidad imaginaria, la raíz cuadrada de  $-1$

Cualquier número complejo, por ejemplo:  $z=a+bi$ , representa un punto  $(a,b)$  en el plano cartesiano, de modo que una expresión como la anterior, puede representarse así:

$$a+bi=(c+di)^2 + (e+fi)$$

desarrollando y aplicando igualdad de polinomios se tendrá:

$$\begin{aligned} a &= c^2 - d^2 + e \\ b &= 2cd + f \end{aligned}$$

y esas serán las igualdades con números reales que se iterarán.

Ejemplo para un punto inicial del fractal  $(c,d) = (1,0)$ , y constante  $(e,f) = (0,1)$ , de la fórmula de las  $z$  y la  $c$  antes dada, el siguiente punto  $(a,b)$

se hallará por la fórmula obtenida para  $a$  y  $b$  así:

$$\begin{aligned} a &= 1-0+0=1 \\ b &= 0+1=1 \end{aligned}$$

así que el segundo punto será  $(1,1)$ . Se seguirá la iteración poniendo este punto  $(1,1)$  de nuevo en las fórmulas de  $a$  y  $b$ , nos dará  $(0,3)$  y así se seguirá la iteración. Un número considerable de puntos conformarán el fractal.

Joaquín González Álvarez  
[joaquin.gonzalez@crystal.hlg.sld.cu](mailto:joaquin.gonzalez@crystal.hlg.sld.cu)