

## SUBGRUPOS ESTABLES CON RESPECTO A CONJUNTOS DE OPERADORES

Una forma de generar aplicaciones en el interior de un grupo es definir una ley de composición externa entre el grupo y un conjunto cualquiera. Si a esta ley externa le imponemos las condiciones adecuadas para que las aplicaciones generadas respeten la ley interna del grupo, llegamos entonces de forma natural al fecundo concepto de estabilidad o licitud, de importante aplicabilidad en diferentes cuestiones de álgebra.

01. Una breve introducción.
02. El retículo completo y  $\cup$ -inductivo de los subgrupos de un grupo.
03.  $\Delta$  - grupos.
04.  $\Delta$  - subgrupos.

### **01. Una breve introducción:**

Grupos: Un grupo es un par constituido por un conjunto y una ley de composición interna asociativa, con elemento neutro y tal que para todo elemento del grupo existe en él otro elemento simétrico. Si además fuera conmutativa, diríamos que el grupo es conmutativo.

Subgrupos: Son subconjuntos de un grupo que tienen también estructura de grupo con respecto a la misma ley interna del grupo. Todo grupo es subgrupo de sí mismo.

Aplicaciones: Son correspondencias tales que a cada elemento de un conjunto (inicial) le corresponde un solo elemento de otro conjunto (final). Pueden coincidir el conjunto inicial y el conjunto final. Los elementos del conjunto inicial se dicen originales de la aplicación, y los correspondientes del conjunto final son sus imágenes.

Si consideramos las aplicaciones definidas en un conjunto  $G$  cualquiera, llamaríamos  $F(G) = \{f / f : G \rightarrow G\}$  al conjunto de todas estas aplicaciones.

Aplicaciones inyectivas: Todo elemento del conjunto final es imagen de, a lo más, un solo original.

Aplicaciones biyectivas: Todo elemento del conjunto final es imagen de uno y solo de uno de los elementos del conjunto inicial. Y todo elemento del conjunto final es imagen de un elemento del conjunto inicial.

Aplicaciones suprayectivas: Las restantes aplicaciones.

Homomorfismos de grupos: Una aplicación desde un grupo inicial en un grupo final es un homomorfismo si la imagen de la composición de dos elementos en el primer grupo es la composición de las imágenes en el segundo grupo.

Isomorfismos: Si una aplicación biyectiva desde un grupo inicial en un grupo final es un homomorfismo diremos que se trata de un isomorfismo de grupos.

Endomorfismos: Si el grupo inicial y final fuera el mismo, el homomorfismo se denomina endomorfismo. Es decir, si  $\forall x, y \in G, f(x.y) = f(x).f(y)$ .

Llamemos  $End(G)$  al conjunto de todos los endomorfismos de  $G$ :

$$End(G) = \{f \in F(G) / f(x.y) = f(x).f(y), \forall x, y \in G\}$$

es evidente que  $End(G) \subseteq F(G)$ .

Familia de Moore: Una familia de partes de un conjunto se dice que es de Moore, si el conjunto que se parte es una de las partes de la familia y la intersección de cualquier subfamilia de partes es también una parte de la familia.

Dentro de una determinada familia de Moore  $M$ , se define la Clausura de Moore  $M(X)$  de un conjunto  $X$ , como la mínima parte de la familia que contiene a  $X$ .

Retículos: Un conjunto que esté al menos parcialmente ordenado, se dice que es un retículo, si el ínfimo de cada dos de sus partes es un elemento del conjunto, y el supremo de cada dos de sus partes es también un elemento del conjunto.

Retículo completo: Un retículo se dice que es completo si cada subfamilia de partes del mismo tiene ínfimo y supremo dentro del retículo. En general, toda Familia de Moore es un retículo completo.

U-inducción: Un conjunto que esté al menos parcialmente ordenado, se dice que es U-inductivo si toda cadena de subconjuntos del mismo admite mayorante. Si admite mayorante mínimo o supremo se dice que es fuertemente inductivo.

**02. El retículo completo y U-inductivo de los subgrupos de un grupo:**

Si llamamos  $S(G)$  a la familia de los subgrupos de un grupo  $G$ , es fácil probar que se trata de una familia de Moore y, por consiguiente, que  $(S(G), \subseteq)$  es un retículo completo, que, además, es U-inductivo:

a) se trata de una familia de Moore, pues:

$$1) G \in S(G)$$

$$2) S_k \in S(G) \Rightarrow \bigcap_{S_{ki} \in S_k} S_{ki} \in S(G)$$

La Clausura de Moore de un subconjunto  $X$  de  $G$  cualquiera en el retículo de los subgrupos de  $G$  es expresable por

$$S(X) = \bigcap \{S_k : S_k \in S(G) \wedge X \subseteq S_k\}$$

esto es, se trata del mínimo subgrupo de  $S(G)$  que contiene a  $X$ .

b) y toda familia de Moore es retículo completo. Se tiene, explícitamente, para dos subgrupos cualesquiera:

$$1) \inf(S_i, S_j) = S_i \cap S_j$$

$$2) \sup(S_i, S_j) = \bigcap \{S : S \in S(G) \wedge S_i \subseteq S \wedge S_j \subseteq S\}$$

la completitud se observa de inmediato si se considera cualquier familia de subgrupos de  $G$ . Supongamos la familia  $\{S_i\}_{i \in I} = \{S_1, S_2, \dots\}$ . El ínfimo y el supremo son:

$$\inf \{S_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \{S_i\} \quad \sup \{S_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \{X : X \in S(G) \wedge S_i \subseteq X\}$$

y en cuanto a su carácter de retículo U-inductivo:

Si es  $c \subseteq S(G)$  una cadena de subgrupos del retículo  $S(G)$ , se tiene que el subgrupo  $H = \bigcup \{S : S \in c\}$  es mayorante mínimo de la cadena, o sea, es el supremo. Por tanto,  $S(G)$  es U-inductivo.

**02.  $\Delta$ -grupos:**

Dado un conjunto cualquiera,  $\Delta$ , y considerando el grupo  $G$ , podemos definir una ley externa tal que a cada par  $(d, x) \in \Delta \times G$  le corresponde un elemento de  $G$ :

$$*: (d, x) \rightarrow d * x \in G$$

es decir, para cada elemento  $d$  del conjunto  $\Delta$  existe una correspondencia entre cada  $x$  y cada  $d * x$ , o, dicho de otro modo, para cada elemento  $d$  se puede definir una correspondencia  $h(d)$  tal que a cada  $x$  le corresponde un  $d * x$ . Esto nos indica que existe, para cada elemento  $d$  una aplicación de  $G$  en  $G$ , es decir:

$$\forall d \in \Delta, \exists h(d) / h(d)(x) = d * x \in G$$

y, por consiguiente, hay una correspondencia:

$$h : \Delta \rightarrow F(G)$$

Se tiene, entonces, que

$$\forall d \in \Delta, h(d) = f \in F(G)$$

de modo que

$$\forall x \in G, f(x) \in G$$

y, por consiguiente, podremos escribir:

$$\forall (d, x) \in \Delta \times G, h(d)(x) \in G$$

De este modo se tiene, en definitiva, que  $h(\Delta) \subseteq F(G)$ . Pues la imagen de cada elemento de  $\Delta$  es una aplicación de  $G$  en  $G$ . Nos preguntamos, en este punto, por las condiciones que habrían de darse para que la imagen de cada elemento de  $\Delta$  fuera, además, un endomorfismo. Esto es, en qué situación se cumpliría que  $h(\Delta) \subseteq \text{End}(G)$ . Esto lo resuelve el teorema siguiente.

Teorema:

La condición necesaria y suficiente para que  $h(\Delta) \subseteq \text{End}(G)$  es que la ley externa  $*$  sea distributiva con respecto a la ley interna del grupo.

En efecto:

- Veamos que es condición necesaria:

si  $h(\Delta) \subseteq \text{End}(G)$ , entonces,  $h(d)$  será un endomorfismo, por lo que se cumple  $\forall d \in \Delta, \forall x, y \in G, d * (x.y) = h(d)(x.y) = h(d)(x).h(d)(y) = (d * x).(d * y) \rightarrow *$  es ley distributiva con respecto a la operación interna del grupo  $G$ .

- Veamos que es condición suficiente:

Si  $*$  es distributiva, entonces  $\forall d \in \Delta, \forall x, y \in G, d * (x.y) = (d * x).(d * y)$ , y esto implica que  $\forall d \in \Delta, \forall x, y \in G, h(d)(x.y) = h(d)(x).h(d)(y) \rightarrow h(\Delta) \subseteq \text{End}(G)$ .

En definitiva, nos encontramos que para que un grupo  $G$  dotado de una ley externa sobre un conjunto  $\Delta$  permita definir una correspondencia  $h$  de modo que a cada elemento de  $\Delta$  le corresponda un endomorfismo de  $G$  es necesario que tal ley externa sea distributiva con respecto a la ley del grupo  $G$ .

En este caso diremos que  $G$  es un grupo con dominio de operadores  $\Delta$ , o bien, que  $G$  es un  $\Delta$ -grupo. Diremos también que  $\Delta$  es el dominio de los operadores del grupo  $G$ .

La definición podríamos concretarla del modo siguiente.

Definición: Un grupo con operadores, o  $\Delta$ -grupo, es una terna  $((G, \cdot), \Delta, *)$ , donde:

- a)  $(G, \cdot)$  es un grupo multiplicativo.
- b)  $\Delta$  es un conjunto que llamaremos *dominio de operadores del grupo  $G$* .
- c)  $*$  es una ley externa de  $\Delta \times G$  en  $G$  distributiva con respecto a la ley multiplicativa del grupo.

Trivialmente, se verifican las propiedades que siguen.

Propiedades elementales:

1) si  $G$  es  $\Delta$ -grupo y  $\Delta' \subseteq \Delta \rightarrow G$  es  $\Delta'$ -grupo. Efectivamente, es así, porque se cumple que  $\Delta' \subseteq \Delta \rightarrow h(\Delta') \subseteq h(\Delta) \subseteq \text{End}(G)$

2)  $\forall d \in \Delta, h(d) \in \text{End}(G) \rightarrow h(d)(1) = d * 1 = 1, h(d)(x^{-1}) = d * x^{-1} = (d * x)^{-1}$

en adelante suprimiremos, por simplicidad, la notación de la ley externa, indicando la expresión  $d * x$  por  $dx$ . Por lo cual, la propiedad anterior la indicaríamos por:

$$d1=1 \text{ y } dx^{-1} = (dx)^{-1}$$

### 03. $\Delta$ -subgrupos:

#### 03.1. Partes estables o lícitas:

Supongamos que es  $G$  un  $\Delta$ -grupo, y consideremos el conjunto  $P(G)$  de las partes de  $G$ . Una parte  $H$  del grupo  $G$  se dice que es *estable* o que es *lícita* con respecto al dominio de operadores  $\Delta$ , o bien, que es una  $\Delta$ -parte de  $G$  si se verifica que la imagen de todo elemento de  $H$  es un elemento de  $H$ , o sea, si es

$$\forall d \in H, dH \in H$$

El conjunto de las  $\Delta$ -partes lo podemos designar por  $\Delta P(G)$ .

La propiedad inmediata de estructuración de estas  $\Delta$ -partes viene dada por la proposición siguiente.

Teorema:

El conjunto  $\Delta P(G)$  de las partes lícitas de un grupo  $G$  es una familia de Moore y, por consiguiente, un retículo completo.

En efecto:

1)  $G \in \Delta P(G)$ . Trivialmente.

2)  $\forall P_k \in \Delta P(G), \bigcap \{p_{ki} / p_{ki} \in P_k\} \in \Delta P(G)$ , puesto que

$$\begin{aligned} \forall x \in \bigcap \{p_{ki} / p_{ki} \in P_k\} &\Rightarrow x \in p_{ki}, \forall p_{ki} \in P_k \Rightarrow dx \in p_{ki}, \forall d \in \Delta \\ &\Rightarrow dx \in \bigcap \{p_{ki} / p_{ki} \in P_k\} \Rightarrow \bigcap \{p_{ki} / p_{ki} \in P_k\} \in \Delta P(G) \end{aligned}$$

La Clausura de Moore de un subconjunto  $X$  de  $G$  cualquiera en el retículo de las partes estables de  $G$  es expresable por

$$\Delta P(X) = \bigcap \{P_k : P_k \in \Delta P(G) \wedge X \subseteq P_k\}$$

mínima  $\Delta$ -parte que contiene a  $X$ .

El mínimo y el supremo de una familia  $\{S_i\}_{i \in I} = \{S_1, S_2, \dots\}$  cualquiera en el retículo completo  $(\Delta P(G), \subseteq)$  de las partes estables, se expresan también de manera sencilla:

$$\inf \{S_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \{S_i\} \quad \sup \{S_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \{X : X \in \Delta P(G) \wedge S_i \in X\}$$

Teorema:

El Retículo  $(\Delta P(G), \subseteq)$  de las partes lícitas de un grupo  $G$  es U-inductivo.

En efecto: veamos trivialmente que toda cadena contenida en  $\Delta P(G)$  admite mayorante mínimo o supremo.

$M = \bigcup \{c_i / c_i \in c\}$  es mayorante de la cadena  $c$ . Es inmediato que se trata de una parte estable, pues

$$\begin{aligned} \forall x \in M, c_i \in c / x \in c_i \wedge c_i \in \Delta P(G) &\Rightarrow \forall d \in \Delta / dx \in c_i \Rightarrow dx \in M \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall x \in M, \forall d \in \Delta &\Rightarrow dx \in M \Rightarrow M \in \Delta P(G) \end{aligned}$$

### 03.2. Subgrupos estables o lícitos:

Definimos el conjunto de los subgrupos estables o lícitos de un  $\Delta$ -grupo  $G$  como la intersección de la familia de sus subgrupos con la familia de las  $\Delta$ -partes del  $G$ .

$$\Delta S(G) = S(G) \cap \Delta P(G)$$

Teorema:

El conjunto  $\Delta S(G)$  de los subgrupos lícitos de un grupo  $G$  es una familia de Moore y, por consiguiente, un retículo completo.

En efecto:

1)  $G \in \Delta S(G)$ . Trivialmente.

2)  $\forall S_k \in \Delta S(G), \bigcap \{s_{ki} / s_{ki} \in S_k\} \in \Delta S(G)$ , puesto que

$$\begin{aligned} \forall x \in \bigcap \{s_{ki} / s_{ki} \in S_k\} &\Rightarrow x \in s_{ki}, \forall s_{ki} \in S_k \Rightarrow dx \in s_{ki}, \forall d \in \Delta \\ \Rightarrow dx \in \bigcap \{s_{ki} / s_{ki} \in S_k\} &\Rightarrow \bigcap \{s_{ki} / s_{ki} \in S_k\} \in \Delta S(G) \end{aligned}$$

La Clausura de Moore de un subconjunto  $X$  de  $G$  cualquiera en el retículo de los subgrupos estables de  $G$  es expresable por

$$\Delta S(X) = \bigcap \{S_k : S_k \in \Delta S(G) \wedge X \subseteq S_k\}$$

mínimo  $\Delta$ -subgrupo que contiene a  $X$ .

El mínimo y el supremo de una familia  $\{S_i\}_{i \in I} = \{S_1, S_2, \dots\}$  cualquiera en el retículo completo  $(\Delta S(G), \subseteq)$  de los subgrupos estables, se expresan también de manera sencilla:

$$\inf \{S_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \{S_i\} \quad \sup \{S_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \{X : X \in \Delta S(G) \wedge S_i \in X\}$$

Teorema:

El retículo  $(\Delta S(G), \subseteq)$  de los subgrupos lícitos de un grupo  $G$  es U-inductivo.

En efecto:

Sea una cadena de subgrupos estables  $\{c\} = \{c_1 \subseteq c_2 \subseteq \dots\}$ . Veamos que el conjunto unión  $S_c = \bigcup \{c_i : c_i \in c\}$  es supremo.

a)  $S_c$  es un  $\Delta$ -subgrupo.

Veamos primero que  $S_c$  es un subgrupo del grupo  $G$ :

$$S_c \in S(G), \forall (x, y) \in S_c^2 \Rightarrow \exists c_k \in c / (x, y) \in c_k^2 \Rightarrow x, y^{-1} \in c_k \Rightarrow x, y^{-1} \in S_c$$

Veamos que es estable con respecto al conjunto de operadores:

$$\forall d \in \Delta, \forall x \in S_c \Rightarrow \exists c_k \in c / dx \in c_j \Rightarrow dx \in \bigcup \{c_j : c_j \in c\} = S_c \Rightarrow dx \in S_c$$

b)  $S_c$  es, también, el supremo de la cadena ( $S_c = \sup \{c\}$ ).

$$\forall c_k \in c, c_k \subseteq S_c$$

$$Si \text{ es } L \in \Delta S(G) / (\forall c_k \in c, c_k \in L) \Rightarrow \bigcup \{c_j : c_j \in c\} \subseteq L \Rightarrow S_c \subseteq L$$

Esto nos indica que  $S_c$  es menor o igual que cualquier mayorante de la cadena, es decir, se trata del mayorante mínimo de la cadena:

$$S_c = \sup \{c\}$$

### 03.3. Los subgrupos distinguidos de un grupo:

Se dice que  $D \in S(G)$  es un subgrupo distinguido o normal del grupo  $G$  si se verifica que para todo elemento  $x$  del grupo su composición con un elemento de  $D$  y con el inverso de  $x$  es un elemento de  $D$ .

Es decir:

$$D \in S(G) \text{ disting} \Leftrightarrow \forall x \in G, xDx^{-1} \in D$$

Si llamamos  $D(G)$  a la familia de los subgrupos distinguidos de  $G$ , podemos definir los  $\Delta$ -subgrupos distinguidos del grupo  $G$  como la intersección de  $D(G)$  con la familia de los  $\Delta$ -subgrupos. Sería, entonces:

$$\Delta D(G) = \Delta S(G) \cap D(G)$$

Teorema:

El conjunto  $\Delta D(G)$  de los subgrupos distinguidos lícitos de un grupo  $G$  es una familia de Moore y, por consiguiente, un retículo completo.

En efecto, pues se cumple, trivialmente:

$$1) G \in \Delta D(G).$$

$$2) \forall D_k \in \Delta D(G), \bigcap \{d_{ki} / d_{ki} \in D_k\} \in \Delta D(G).$$

La Clausura de Moore de un subconjunto X de G cualquiera en el retículo de los subgrupos distinguidos estables de G es expresable por

$$\Delta D(X) = \bigcap \{D_k : D_k \in \Delta D(G) \wedge X \subseteq D_k\}$$

mínimo  $\Delta$ -subgrupo distinguido que contiene a X.

Teorema:

El retículo  $(\Delta D(G), \subseteq)$  de los subgrupos lícitos de un grupo G es U-inductivo.

En efecto:

Sea una cadena de subgrupos distinguidos estables  $\{c\} = \{c_1 \subseteq c_2 \subseteq \dots\}$ . Veamos que el conjunto unión  $D_c = \bigcup \{c_i : c_i \in c\}$  es supremo.

a)  $D_c$  es un  $\Delta$ -subgrupo distinguido.

Veamos primero que  $D_c$  es un subgrupo del grupo G:

$$D_c \in \mathcal{S}(G), \forall (x, y) \in D_c^2 \Rightarrow \exists c_k \in c / (x, y) \in c_k^2 \Rightarrow x.y^{-1} \in c_k \Rightarrow x.y^{-1} \in D_c$$

Veamos que es estable con respecto al conjunto de operadores:

$$\forall d \in \Delta, \forall x \in D_c \Rightarrow \exists c_k \in c / dx \in c_j \Rightarrow dx \in \bigcup \{c_j : c_j \in c\} = D_c \Rightarrow dx \in D_c$$

Veamos ahora que es subgrupo distinguido:

$$D_c \in \Delta \mathcal{S}(G), \forall x \in D_c, \exists c_j \in c / \forall z \in G, xzx^{-1} \in c_j \Rightarrow xzx^{-1} \in \bigcup \{c_j : c_j \in c\} = D_c \Rightarrow \forall x \in D_c, \forall z \in G, xzx^{-1} \in D_c$$

b)  $D_c$  es, también, el supremo de la cadena  $(D_c = \sup \{c\})$ .

$$\forall c_k \in c, c_k \subseteq D_c$$

$$Si \text{ es } L \in \Delta D(G) / (\forall c_k \in c, c_k \in L) \Rightarrow \bigcup \{c_j : c_j \in c\} \subseteq L \Rightarrow D_c \subseteq L$$

Esto nos indica que  $D_c$  es menor o igual que cualquier mayorante de la cadena, es decir, se trata del mayorante mínimo de la cadena:

$$D_c = \sup \{c\}$$

Son muchas las proposiciones que se pueden probar con referencia a subgrupos distinguidos de un grupo. Veamos, en particular, el ejemplo siguiente.

Proposición:

$$\forall G_1, G_2 \in \Delta \mathcal{S}(G), \forall D \in \mathcal{D}(G_1) \Rightarrow D \cap G_2 \in \Delta \mathcal{D}(G_1 \cap G_2)$$

En efecto:

a) Es inmediato que  $D \cap G_1$  es subgrupo de  $\Delta \mathcal{S}(G_1 \cap G_2)$ .

b) Veamos que, además es subgrupo distinguido:

$$\begin{aligned} \forall x \in D \cap G_2, \forall z \in G_1 \cap G_2 &\Rightarrow x \in D \wedge z \in G_1 \wedge D \in \Delta D(G_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow xzx^{-1} \in D &\Rightarrow xzx^{-1} \in D \cap G_2 \Rightarrow D \cap G_2 \in \Delta D(G_1 \cap G_2) \end{aligned}$$

-----oo0oo-----