INTEGRACIÓN POR PARTES EN FORMA TABULAR

José A. Rangel M. [1]

1. Introducción

Es conocida la dificultad que encuentra el estudiante al aplicar la fórmula de integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Tal dificultad comienza en la elección de las funciones u y v. Además, se sabe que hay integrales que no pueden ser resueltas por partes como en $\int e^{x} \operatorname{arcsen} x\,dx$.

En este ensayo, se propone un método práctico (o más bien, sugerencias) basado en las referencias bibliográficas citadas al final.

2. Elección de u y dv

En esta sección, se pretende dar esta elección apoyados en el texto [1]. Para ello, se usa la palabra nemotécnica **ILATE** citada en dicho texto, con el siguiente significado:

I: funciones **I**nversas Trigonométricas;
L: funciones **L**ogaritmo Neperiano;
A: funciones **A**lgebraicas;
T: funciones **T**rigonométricas;
E: funciones **E**xponenciales.

---

[1] *José A. Rangel M. es Licenciado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela (Caracas - Venezuela). Magister Scientae en Matemática de la Facultad de Ciencias Universidad de los Andes (Mérida-Venezuela). Profesor Asociado adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira.*
e-mail: rangelmoreno@cantv.net

Integración por partes en forma tabular

Para elegir "*u*", se toma la primera función que ocurra de izquierda a derecha en correspondencia con la palabra **ILATE**. Por ejemplo, en $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, $u = x$, pues es la función algebraica. Con esa elección, *dv* es el resto, o sea: $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Tal como se observa, esta elección apoya la experiencia de lograr que la segunda integral sea fácil de calcular.

A fin de esquematizar la fórmula de integración por partes, se usará el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[dr, "+"] & dv \\ u' & v \arrow[l, "-"'] \end{tikzcd}$$

Las flechas horizontales indicarán las integrales de dichos productos y la flecha oblicua indicará el producto con signo, comenzando por el signo mas (+). Nótese la alternabilidad de los signos comenzando en la flecha oblicua con más (+). Obsérvese que siguiendo el diagrama anterior, se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

La igualdad anterior admite la siguiente generalización:

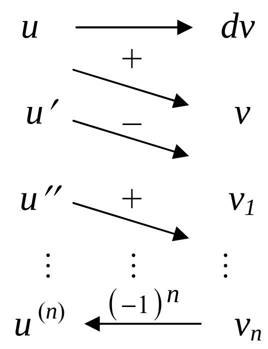
$$\int uv \, dx = uv_1 - \int u' v_1 \, dx = uv_1 - u' v_2 + \int u^{(2)} v_2 \, dx = \cdots$$

$$= u v_1 - u' v_2 + \cdots + (-1)^n \int u^{(n)} v_n \, dx,$$

donde:

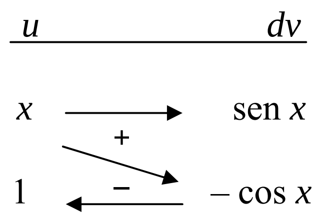
$$u^{(i+1)} = \frac{d}{dx} u^{i} \quad \text{y} \quad v_{i+1} = \int v_i \, dx$$

Es posible visualizar la fórmula anterior mediante el siguiente diagrama:



Claramente, hay tres columnas: la *izquierda* donde están las derivadas sucesivas de *u*, la *central* indica los productos diagonales con los signos alternados comenzando con el signo "+" y la *derecha* que contiene las sucesivas primitivas (o antiderivadas) de *v*.

Ejemplo 1. En la integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, el diagrama es:



Se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C \quad \blacksquare$$

3. Distintos Casos:

3.1. Integrales de la forma:

$$\int p_n(x) \operatorname{sen} ax \, dx; \quad \int p_n(x) \cos ax \, dx; \quad \int p_n(x) e^{ax} \, dx.$$

donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n. Usando la palabra "ILATE", se hace $u = p_n(x)$ en todas estas integrales, pues es la función algebraica. La derivada $(n+1)$-ésima de u es 0. En este caso, debajo de la columna de u, se colocarán las derivadas sucesivas de u hasta llegar a 0. En la columna de dv, se escribirán las integrales sucesivas de v.

Ejemplo 2. Tomando el ejemplo 1, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} u & & dv \\ \hline x & \longrightarrow & \operatorname{sen} x \\ & \searrow^{+} & \\ 1 & \searrow^{-} & -\cos x \\ & {}^{+} & \\ 0 & \longleftarrow & -\operatorname{sen} x \end{array}$$

Así:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x - \int 0 \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Nótese que los signos para los productos diagonales son siempre alternados comenzando por el signo "+". ■

3.2. Integrales de la forma:

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx)\,dx; \qquad \int \mathrm{e}^{ax}\cos\,(bx)\,dx.$$

Usando la palabra "ILATE", $u = \mathrm{sen}\ bx$ (o $\cos\ bx$). Las derivadas de u nunca llegan a ser 0. ¿Cómo proceder entonces? Muy sencillo, nos detendremos cuando el producto horizontal sea igual al integrando, salvo un factor constante. Por supuesto, se está aplicando reiteradamente la fórmula de integración por partes.

Ejemplo 3. Hallar $\int e^{2x}\cos\,x\,dx$.

Solución:

u		dv
$\cos x$	$\longrightarrow$	e^{2x}
	$+$	
$-\ \mathrm{sen}\ x$		$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$
	$-$	
$-\cos x$	$\xleftarrow{+}$	$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$

No se necesitan más filas pues se obtuvo el integrando salvo un factor. Así resulta:

$$\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,dx.$$

Transponiendo y resolviendo la integral buscada, se obtiene:

$$\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,dx = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{sen}\,x + C. \quad \blacksquare$$

Integración por partes en forma tabular

Ejemplo 4. Hallar $\int x^2 \ln x \, dx$.

<u>Solución</u>: En este caso, $u = \ln x$. El diagrama es:

u		dv
$\ln x$	$\longrightarrow$	x^2
	$+ \searrow$	
$\frac{1}{x}$		$\frac{x^3}{3}$
	$- \searrow$	
$-\frac{1}{x^2}$	$\overset{+}{\longleftarrow}$	$\frac{x^4}{12}$

Observe que en este caso no se obtiene 0 en la columna de u y tampoco el producto horizontal da el integrando. Sin embargo, la integral del producto horizontal es fácil de calcular. Por tanto:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x . \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\frac{x^4}{12} + \int \frac{-1}{x^2}\frac{x^4}{12} dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

El lector puede comprobar que el resultado es el mismo, si se hubiera tomado la integral del producto de la segunda fila. ■

Sugerencia: Cuando en la columna de la u no obtenga 0, ni el producto horizontal sea el integrando (salvo un factor constante), después de hallar los productos diagonales, súmele, de acuerdo con el signo, la integral del producto horizontal que sea fácil de calcular.

3.3. Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx; \quad \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \, dx; \quad \int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx; \;\; a \neq b.$$

Estos casos se tratan de la misma manera que en el Caso 3.2.

Ejemplo 5. Hallar $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$.

<u>Solución</u>: En este caso, u puede ser cualquiera. Elija, por ejemplo, u = sen 3x.

El diagrama está a continuación:

u		dv
$\operatorname{sen} 3x$	$\longrightarrow$	$\cos 5x$
$3 \cos 3x$	$+$	$\frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x$
$-9 \operatorname{sen} 3x$	$-$ / $+$ $\longleftarrow$	$-\frac{1}{25} \cos 5x$

Entonces

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{5} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x + \frac{3}{25} \cos 3x \cos 5x + \\ + \frac{9}{25} \int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$$

Transponiendo y despejando la integral buscada se obtiene:

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx = \frac{5}{16} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x + \frac{3}{16} \cos 3x \cos 5x + C \qquad \blacksquare$$

Integración por partes en forma tabular

3.4. Integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{(ax+b)^r}dx$

donde $P(x)$ es un polinomio y r no es un entero positivo. Usando la palabra "ILATE", se hace $u = P(x)$ y se trata este caso como se hizo en el Caso 3.1.

Ejemplo 6. Hallar $\int \frac{12x^2+36}{\sqrt[5]{3x+2}}dx$.

Solución: El diagrama correspondiente aparece enseguida

u		dv
$12x^2+36$	$\longrightarrow$	$(3x+2)^{-1/5}$
	$+$	
$24x$		$\frac{5}{12}(3x+2)^{4/5}$
	$-$	
24		$\frac{25}{144}(3x+2)^{9/5}$
	$+$	
0	$\xleftarrow{-}$	$\frac{125}{6048}(3x+2)^{14/5}$

Se obtiene:

$$\int \frac{12x^2+36}{\sqrt[5]{3x+2}}dx = \frac{5}{12}\left(12x^2+36\right)\left(3x+2\right)^{4/5} - \frac{25}{6}\left(3x+2\right)^{9/5} + \frac{125}{252}\left(3x+2\right)^{14/5} + C$$

■

3.5. Limitación:

Este método no permite calcular el valor de la integral, cuando el producto horizontal es igual al integrando precedido del signo más (+).

Ejemplo 7. Hallar: $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cos x\,dx$.

<u>Solución</u>: El diagrama aparece a continuación

u		dv
$\cos x$	$\longrightarrow$	$\cos x$
	$+\ \searrow$	
$-\operatorname{sen} x$		$\operatorname{sen} x$
	$-\ \searrow$	
$-\cos x$	$\xleftarrow{+}$	$-\cos x$

Es necesario detenerse en la segunda fila, pues el producto horizontal es "+ $\cos^2 x$". Por tanto,

$$\int \cos^2 x\,dx = \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = \int \cos^2 x\,dx$$

Este resultado es evidente pero inútil. Sin embargo, la integral propuesta se puede resolver si se aplica la identidad fundamental de la trigonometría y un diagrama parecido al anterior (¡inténtelo!). Así,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx = x - \left(-\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\,dx \right)$$

lo que conduce a:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\, x + \operatorname{sen} x \cos x \,\right] + C \qquad \blacksquare$$

A manera de cierre, este ensayo facilita al lector un método práctico para aplicar la integración por partes, ofreciendo algunos casos muy particulares e ilustrándolos a través de ejemplos.

Referencias Bibliográficas

[1] Cortés, I.y Sánchez, C. (2000): *801 Ejercicios Resueltos de Integral Indefinida*. Fondo Editorial de la UNET. **Serie Problemario** *N^o* **2**.

[2] Folley, K. W. (1947): *Integration by Parts*. American Mathematical Monthly. **Vol. 54** *Nº* **9**, 542-543.

[3] Horowitz D. (1990): *Tabular Integration by Parts*. The College Mathematics Journal. **Vol. 21** *N^o* **4**, 307–311.

[4] Murty V. N. (1980): *Integration by Parts*. The Two-Year College Mathematics Journal. **Vol. 11** *N^o* **2**, 90–94.

[5] Nicol S. J. (1993): *Integrals of Products of Sine y Cosine with Diferent Arguments*. The College Mathematics Journal. **Vol. 24** *N^o* **2**, 158–160.