

UTILIZACIÓN DE LAS ALGEBRAS GEOMÉTRICAS DE CLIFFORD PARA INTERPRETAR LOS FENÓMENOS FÍSICOS

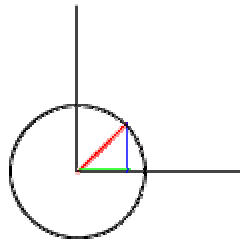
Rafael APARICIO SÁNCHEZ

as álgebras geométricas se han mostrado muy interesantes herramientas para trabajar en volúmenes en lugar del plano. Los números complejos son muy útiles para representar puntos y vectores en el plano. Esto intrigó a Hamilton, quien estuvo pensando un sistema que sirviera igualmente para la representación en el espacio 3D. Estuvo pensándolo mucho tiempo, pero no lo lograba, y el error se encontraba en que pensaba que debían ser 3 componentes, cuando son 4 los que tienen el álgebra de los cuaterniones, que hace posible la representación de puntos, vectores y rotaciones en 3D.

Bertrand Russell escribió:

"Supongamos que el cuerpo cuya longitud queremos medir se mueve con relación a nosotros y que en un segundo recorre la distancia OM . Tracemos ahora un círculo alrededor de O , cuyo radio es la distancia que recorre la luz en un segundo. Desde M tracemos MP , perpendicular a MO , encontrando el círculo en P . Así OP es la distancia que recorre la luz en un segundo. La relación de OP a OM es la relación de la velocidad de la luz a la velocidad del cuerpo. La relación de OP a MP es la relación en que las longitudes aparentes están alteradas por el movimiento. Es decir, si el observador juzga que dos puntos de la línea de movimiento del cuerpo que se mueve están a una distancia mutua representada por MP , una persona que se moviera con el cuerpo juzgaría que estaban en la distancia representada (a la misma escala) por OP . Las distancias del cuerpo que se mueven en los ángulos rectos de la línea del movimiento no se ven afectadas por el movimiento. Todo el conjunto es recíproco; es decir, si un observador que se mueve con el cuerpo fuera a medir la longitud del cuerpo del anterior observador, quedaría alterado, precisamente en la misma proporción. Cuando dos cuerpos se mueven en relación mutua, sus longitudes aparecen más cortas a un tercero que a ellos mismos. Tal es la contracción de Fitzgerald, usada fundamentalmente para determinar el resultado del experimento de Michelson-Morley. Pero ahora se plantea naturalmente por el hecho de que dos observadores no hacen el mismo juicio de simultaneidad."

Si el centro es O, la línea verde es OM, la línea azul es MP y la línea roja es OP.



Con esta simple representación se obtiene la relación que aplicamos siempre a espacio o tiempo en función del observador:

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

No existe ningún inconveniente en utilizar la notación compleja para hacer los cálculos. Así, podemos asignarle a uno de ellos el valor imaginario de esta forma:

$$OM + MPi = OP$$

Como se cuenta respecto a un segundo, aunque hablamos de distancias, nada nos impide utilizar velocidades (arbitrariamente **asigno el eje X a los valores imaginarios**):

$$V_R + V_x i = c$$

Como c es constante, podemos tomar la componente compleja como la virtual V_x , componente virtual de la velocidad, y lo mismo podríamos hacer respecto a un supuesto eje virtual V_y , o V_z . Hay un problema. Solo tenemos un módulo real, y una *velocidad virtual*. Una vez más podemos probar a utilizar los *números cuaterniones* (*yastaquí el pesao de turno otraves con los cuaterninesss* 🌀) para crear una esfera con un "eje real" en el que se proyectan los valores de "tres ejes imaginarios, x, y, z". Sencillamente tenemos que en el plano se da esta expresión:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

... la cual nos interesaría tener una abstracción, copiando el procedimiento de Russell, si fuese o fuera posible: bien, Bertrand Russell dijo que podía dibujar el espaciotiempo en 2D, pero podemos dibujarla en 3D (+1). Para dibujar el espaciotiempo en 3D (+1) tenemos los citados números que tienen un valor real y 3 imaginarios.

Procedemos así: damos un valor imaginario a las componentes x, y, z de la

velocidad, un valor Real al que efectivamente medimos desde el pto de vista del observador y una velocidad constante c que es la de la velocidad de la luz en el vacío.

$$V_c = V_r + V_x i + V_y j + V_z k$$

Que deberá cumplir el algebra de Hamilton:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = \sqrt{-1}$$

En módulo no puede ser superior a "c" en el vacío, pero nunca hemos tenido en cuenta los cambios de dirección. Buscando el valor de la variable "real":

$$V_r = V - V_x i - V_y j - V_z k$$

Si $V_{cte}=c$ tenemos que:

$$V_r = c - V_x i - V_y j - V_z k$$

su módulo es:

$$\sqrt{c^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2}$$

Si no hay cambio en la dirección, la velocidad REAL, ES C, pero si hay cambios en la dirección V_r es siempre menor que c , lo cual intuitivamente parece lógico.

Un vector (o para nombrarlo mejor, un *paravector*) como este, tiene un módulo:

$$V_c = \frac{V_r + V_x i + V_y j + V_z k}{\sqrt{V_r^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

Sabiendo que viene de una esfera tenemos que:

$$\frac{c^2}{\sqrt{c^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2}}$$

Y la velocidad puede ser escrita como:

$$\frac{V_r + V_x i + V_y j + V_z k}{\sqrt{V_r^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2}}$$

Pero además, si en lugar de poner $x \rightarrow x'$ pones el vector r , obtienes el escorzo en las tres dimensiones... de entrada, interesante, ¿no?

Como estás hablando de cantidad de movimiento, esta enlaza con la ecuación de cantidad de movimiento que se obtiene en el electromagnetismo y con la mecánica cuántica, si bien en esta última, de momento, con la velocidad estoy operando como "pure quaternions" o vectores.

(Extractos no literales del libro *"De Natura Visibilium Et Invisibilium"* Cap. "Sobre la constancia de la velocidad de la luz", de R. Aparicio, y de "Siglo XXI: La física que nos espera")

ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LOS TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN DE SCHROEDINGER

La importancia de los números complejos a la hora de representar puntos o vectores en el plano, reside en que pueden ser escritos del siguiente modo:

$$a = b \cdot x + c \cdot y$$

Escogemos un eje, el de los números reales, como X , y el de los números imaginarios como Y :

$$a = b + c \cdot i$$

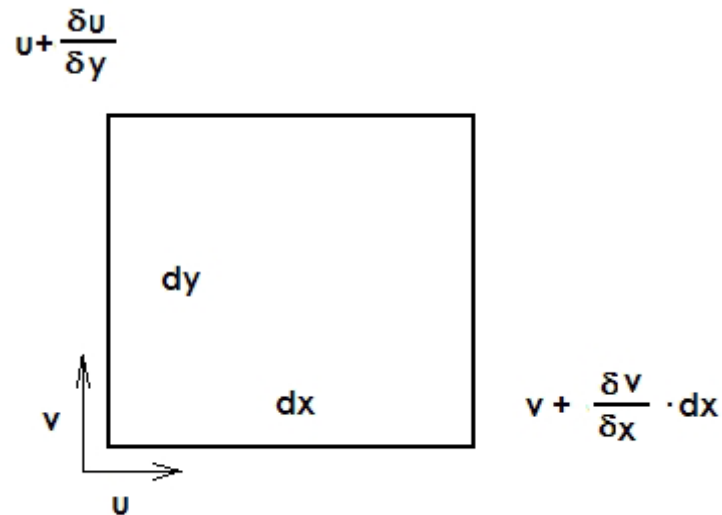
Pero también podría tomarse la siguiente convención, haciendo el eje de las abscisas, el de los números imaginarios:

$$a = b \cdot i + c$$

Así, en el plano, nos es indiferente si estamos tratando con un número complejo o un número real. Lo que es importante es que representan una realidad **"en el plano"** aunque los números **no sean reales**.

Del mismo modo, en la expresión que indicas, cuando se remarca que es el valor "real", habría que comprender exactamente si nos referimos a algo "real" o a un "número real". Más si tratamos del espacio 3D.

De este modo, se puede llegar a una convención según la cual la tríada i, j, k , son los números correspondientes a un **espacio real** compuesto por **números (hiper)complejos**, pertenecientes a las algebras de Clifford, y la parte "real" podemos tomarla como la correspondiente al "tiempo". Realmente, reales serían los dos (valga la redundancia), si bien uno representaría una parte de la realidad, y otro, la otra. Así, si cogemos un elemento de volumen (de momento de área) e intentemos interpretar geoméricamente qué es eso.



Si tomamos un volumen en un tiempo posterior tenemos que:

$$V_t + dt = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dt \right) \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \cdot dt \right)$$

El cambio relativo de volumen es:

$$\frac{d \left(\frac{V_t + dt - V_t}{V_t} \right)}{dt} = \frac{dV_R}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

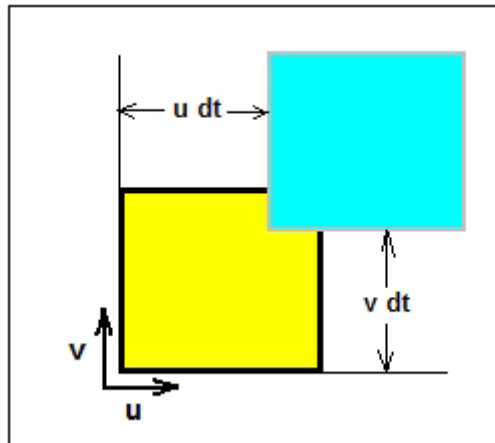
En 3D, tenemos que:

$$\frac{\partial V_R}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$

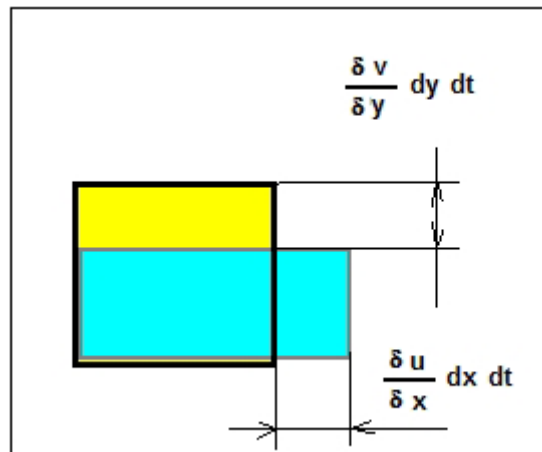
La dilatación de volumen puede relacionarse directamente con la estructura espacial de los gradientes de velocidad.

Un elemento de volumen (en el dibujo representada un área) puede sufrir

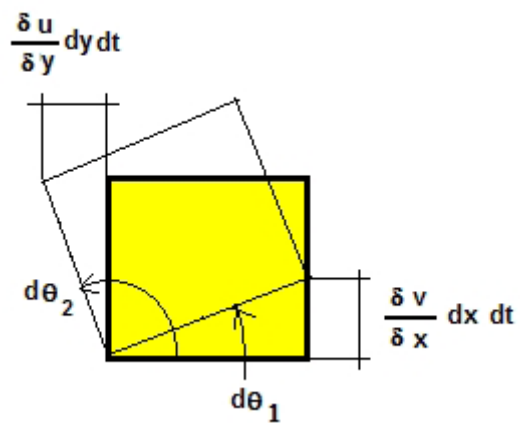
TRASLACIONES:



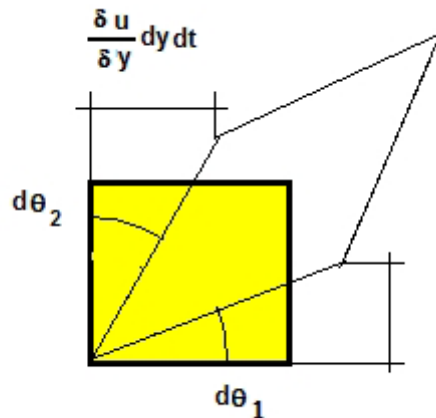
DEFORMACIONES:



ROTACIONES



o ESFUERZOS CORTANTES



Si analizamos los ángulos θ_1 y θ_2 , se puede fácilmente verificar geoméricamente (sino ver referencias):

$$\text{TAN } d\theta_1 \simeq d\theta_1 \simeq \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \cdot dt\right)}{dx}$$

E igualmente:

$$\text{TAN } d\theta_2 \simeq d\theta_2 \simeq \frac{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} dy \cdot dt\right)}{dy}$$

Con lo cual obtenemos que:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Y

$$\dot{\theta}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

De donde podemos observar que la velocidad angular del paquete alrededor del eje Z en el ejemplo, sería:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$$

Pero... ¿hacia donde nos dirigimos? Hacia la interpretación del término existente en la fórmula de Schrödinger.

Bueno, si ahora tenemos en cuenta este término de la citada ecuación:

$$\nabla \left[\frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \right]$$

O mucho más evidente:

$$\nabla \left[\frac{1}{2} (\psi \vec{v} \psi^* - \psi^* \vec{v} \psi) \right]$$

Teníamos que:

$$\vec{J} = \Re[\Psi^*(\vec{r}) \left(\frac{-i\hbar}{m} \vec{\nabla} \right) \Psi(\vec{r})]$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2} (\psi \vec{v} \psi^* - \psi^* \vec{v} \psi) \right]$$

Si tenemos en cuenta que los cuaterniones son magníficos para coger un vector, aplicarle el quaternion y su conjugado y con ello generar una rotación, es lógico que la rotación contraria se realice cambiando los operadores.

Así la rotación inversa sería:

$$q \vec{v} q^* = (q)^* \vec{v} (q^*)^* = p^* \vec{v} p \text{ donde } p = q^*$$

Así, la identidad es una rotación utilizando p, que es la rotación inversa.

Por lo tanto, la ecuación anterior nos indica una rotación, y su inversa negativa, es decir, dos rotaciones en la misma dirección, luego es UNA ROTACIÓN. En ese caso, no existirían esfuerzos, y por ello, cuando se utiliza la ecuación de Schrödinger para el caso de una partícula libre en la que no existen esfuerzos, se está realmente redundando en una redundancia, puesto que si se intenta aplicar a una partícula con esfuerzos, la citada ecuación no dispone de términos que identifiquen estas.

Para ello, necesitaríamos de un término con estas características:

$$\left[\frac{1}{2} (\psi \vec{v} \psi^* + \psi^* \vec{v} \psi) \right]$$

En el caso de esfuerzos solo, y si hubieran rotaciones, tendrían que aparecer ambos:

$$\left[\frac{1}{2} (\psi \vec{v} \psi^* + \psi^* \vec{v} \psi) + \frac{1}{2} (\psi \vec{v} \psi^* - \psi^* \vec{v} \psi) \right]$$

... y aún así faltaría el desplazamiento.

¿Hay alguna formulación que permita estos términos?

Es evidente que sí.

Si tenemos la siguiente fórmula:

$$\nabla (\vec{v}(\psi\psi^*)) = \nabla [(\psi^* \vec{v} \psi) + (\psi \vec{v} \psi^*)]$$

Necesitamos una parte simétrica y una parte antisimétrica... esto puede ser desarrollado así:

$$\nabla (\vec{v}(\psi\psi^*)) = \nabla \left[\frac{1}{2} [(\psi^* \vec{v} \psi) + (\psi \vec{v} \psi^*)] + \frac{1}{2} [(\psi^* \vec{v} \psi) - (\psi \vec{v} \psi^*)] + \frac{1}{2} [(\psi \vec{v} \psi^*) + (\psi^* \vec{v} \psi)] + \frac{1}{2} [(\psi \vec{v} \psi^*) - (\psi^* \vec{v} \psi)] \right]$$

Y ¿esto que es? Pues ni más ni menos, que una parte de la ecuación de corriente de probabilidad, teniendo en cuenta que la anterior definición de esta estaba "incompleta", "amputada".

R. Aparicio.

TRAS LAS PISTAS DE UN FOTÓN SEMI-CLASICO CON LAS G.A.

Es evidente que como estamos en el resbaladizo terreno de la física teórica pura, tenemos que tener en cuenta que si existe ese "elemento", debe de tener algunas características que se adecúen fielmente a la realidad observada. Una de ellas, es que mantiene una velocidad constante. El unico elemento que en el seno de un fluido no ofrece teóricamente resistencia, ante la existencia de un flujo laminar (y sino mal recuerdo, por la paradoja D'alembert), es la **esfera**. El problema es como generar una esfera en ese fluido, de entrada y como supuesto, laminar.

La forma más sencilla es el **doblete**.

La velocidad constante del doblete, puede ser descompuesta en un flujo a velocidad constante y un doblete. Dicho doblete está formado por una fuente y un sumidero, unidas en un mismo punto.

La expresión del flujo de un doblete puntual 3D en el origen es:

$$\phi = -\frac{\mu r \vec{u}}{4\pi r^2} = -\frac{\mu \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Expresado en potencial complejo tiene esta forma:

$$F = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{r}$$

Siendo F la suma del flujo y de la corriente, del siguiente modo:

$$F = \phi + i\psi$$

... generalizable , en el espacio 3D con la utilización de las GA, siendo el flujo y la corriente representables del siguiente modo:

$$F = \phi + \vec{u}\psi$$

Suma de un escalar y un vector, correspondiente a las Cl_3^0
Aplicando lo anterior, y teniendo en cuenta que:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

Estos potenciales complejos se utilizan en forma compleja por ser una interesante forma de representarlos en el plano. Se puede utilizar el doblete 2D a modo pedagógico, y de hecho, no he encontrado mucha información sobre el doblete 3D (la poca que tengo es la que copio bajo). Hay que tener en cuenta que el uso de las Even Clifford Algebras (¿even = "par"?) o cuaterniones no es por un "enamoramamiento" con respecto a estos, sino porque son una generalización de la representación tal como lo es, los números complejos, al plano, los cuaterniones al espacio 3D, y nos provee de una interesante herramienta "visualizable".

Utilizando un cuaternion normalizado y existiendo un ángulo que cumpla la relación explicada unos posts antes sobre el algebra de los quaterniones, tenemos que

$$e^{\vec{u}\theta} = \cos(\theta) + \vec{u}(\theta)$$

Si buscamos una expresión de mecánica de fluidos que se acerque a la esfera en el seno de un fluido, y dado que se pueden sumar por ser lineales las expresiones, tenemos que una esfera en el seno de un flujo constante es la suma de un flujo constante y un doblete, así tenemos que con el citado flujo, tenemos una distribución de velocidades como sigue:

$$v = V_{\infty} \hat{u} - \frac{\mu \cos\theta}{2\pi r^2} \vec{e}_r - \frac{\mu \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\theta$$

en el cual el vector \vec{e}_r y el vector \vec{e}_θ serían perpendiculares, si mi interpretación es correcta. El vector \vec{e}_θ puede ser interpretado como la parte vectorial del cuaternion normalizado, y se podría tomar el afectado por el coseno como el eje real.

¿Alguna observación?

(Nota: cuando escribía "filosofía", llenaba páginas, y ahora que escribo fórmulas, no hay nada. No sé si es porque son unas soberanas estupideces o porque es más interesante la dialéctica que estas...)

References:

- <http://denaturavisibiliumetinvisibilium.blogspot.com/>
- Quaternion and Rotation Sequences, Jack B. Kuipers
- Vectors, tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics, Rutherford Aris.
- Lectures On Clifford (Geometric) Algebras. Rafal Ablamowicz et. al.
- Mecánica de Fluidos. Victor L. Streeter et. al.
- De Natura Visibilium et Invisibilium. R. Aparicio. Ed. Elaleph.
- Siglo XXI: La Física que nos espera. R. Aparicio. Ed. Elaleph.