¿CAOS?

Alberto Mejías[1]

"Caos existió antes que todos y enseguida Gea la de anchas espaldas, asiento seguro y permanente de los inmortales…De él nacieron el Erebo y la Noche que al unirse dieron vida al Éter y a Hémera…"

Mitología griega

¿Qué es Teoría del Caos?

La Teoría del Caos (TC) es una ciencia que establece la impredicibilidad como principio al nivel de la experiencia común.

La creencia en el determinismo Newtoniano, de que el estado presente del mundo determina el futuro de manera precisa, dominó al pensamiento científico durante dos siglos. Este credo se basaba en ciertas leyes de la Física, las ecuaciones del movimiento de Newton, que tienen la propiedad de que las condiciones iniciales determinan las soluciones para todo tiempo.

El advenimiento de la Mecánica Cuántica, a principios del siglo XX, expuso el gran engaño del determinismo. Se puso al descubierto que, al menos al nivel de electrones, protones y átomos, la incertidumbre prevalece.

Sin embargo, a pesar de la Mecánica Cuántica, las ecuaciones de Newton gobiernan el comportamiento del Sistema Solar, el clima y muchas situaciones de la vida diaria.

La revolución cuántica dejó intactos muchos dogmas determinísticos. Por ejemplo, mucho después de la segunda guerra mundial los científicos mantuvieron

[1] Alberto R. Mejías E., es Licenciado en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, ULA (Mérida – Venezuela). Profesor de Análisis y Topología. Actualmente es jubilado de la Universidad de los Andes.
alrame59@cantv.net, alrame59@gmail.com, alrame59@hotmail.com.

la creencia de que se podrían hacer predicciones climáticas a gran escala en la medida en que crecieran los recursos de computación.

Como consecuencia de la TC, el mundo ha comprendido que la filosofía determinista se ha hecho insostenible a todos los niveles. El sindrome de la incertidumbre ha ido penetrando.

La TC contribuye a mucho más que extender el dominio de la indeterminación, tal como lo hizo la Mecánica Cuántica en su momento. El entendimiento más profundo de la dinámica subyacente a la TC, ha ido vertiendo luces en cada rama de ciencia.

La TC se ha desarrollado, no por el descubrimiento de nuevas leyes de la física, sino por un más profundo análisis de las ecuaciones que describen la física Newtoniana. Es una revolución científica originada en las matemáticas. La deducción más bien que la inducción, es su metodología.

La TC toma las ecuaciones de Newton, las analiza con instrumental matemático y utiliza ese análisis para establecer la extendida impredicibilidad de los fenómenos descritos por esas ecuaciones. Vía matemáticas se establecen la fallas del determinismo Newtoniano ¡usando las propias ecuaciones de Newton!

Los antecedentes de la TC se remontan a los tiempos de la segunda guerra mundial.

Durante la segunda guerra mundial dos matemáticos británicos, Mary Cartwright y J. L. Littlewood, habían estado analizando algunas ecuaciones involucradas en sus estudios de ondas de radio. Ellos encontraron un comportamiento inesperado e inusual de las soluciones de esas ecuaciones.

De hecho Cartwright y Littlewood probaron matemáticamente que el caos podría existir, aun en ecuaciones que se alcanzan de manera natural en Ingeniería.

Pero el mundo no estaba preparado para oír acerca de esto y todavía hoy, sus importantes contribuciones a la TC, no son bien conocidas.

Aun, a comienzos de la década de los años mil novecientos sesenta, matemáticos de la talla de Stephen Smale, un afamado topologista, creían que ¡el caos no existe! Para esa época, confiesa Smale, recibió una carta de un matemático del M.I.T. llamado Norman Levinson, coautor del texto principal para graduados, de ecuaciones diferenciales ordinarias, en la cual, Levinson, le escribía un reciente resultado de su trabajo el cual contenía un contraejemplo a esta conjetura. El trabajo de Levinson aclaraba extensamente, el trabajo de Cartwright y Littlewood.

Smale trabajó duramente, para tratar de resolver el reto que la carta imponía a sus creencias. Tuvo que traducir los argumentos analíticos de Levinson a su propia forma geométrica de pensamiento. Al menos en mi caso, confiesa, la comprensión de las matemáticas no se obtiene de lo que se lee o se escucha. Proviene del replanteamiento de lo leído o escuchado. Tengo que reconstruir las matemáticas en el contexto de mi particular experiencia y esa experiencia consiste de muchos hilos: algunos fuertes y otros débiles. Mi experiencia es más fuerte en el análisis geométrico, pero me enredo en el seguimiento de una maraña fórmulas. Yo tiendo ser un poco más lento que la mayoría de los matemáticos, para comprender un argumento. La literatura matemática puede ser útil para proveer indicios y, a menudo, uno puede asociar estos indicios para lograr un cuadro eficiente. Yo sentiré que tengo una comprensión del asunto cuando yo haya logrado reorganizar las matemáticas que lo expresan, en mis propios términos, no antes.

Finalmente, Smale se convenció de que Levinson estaba en lo correcto y que su conjetura era errada ¡El caos estaba ya, implícito en los análisis de Cartwright y

Littlewood! La paradoja estaba resuelta, Smale estaba equivocado en sus creencias. Pero, mientras aprendía eso ¡descubrió la herradura!

La Herradura de Smale

La herradura es una consecuencia natural de una forma geométrica de considerar a las ecuaciones de Cartwright-Littlewood y Levinson. Esta geometrización provee una comprensión de los mecanismos del caos y un vínculo causal con la extendida impredicibilidad en la dinámica.

El caos es un fenómeno de la dinámica y la dinámica es la evolución con respecto al tiempo, de un conjunto de estados de la naturaleza.

Supongamos que medimos al tiempo en unidades discretas como segundos o minutos. Idealicemos a los estados de la naturaleza como puntos en el plano bidimensional.

Comencemos describiendo un ejemplo lineal no caótico. La idea es considerar a un cuadrado y estudiar lo que suceda a un punto en este cuadrado en una unidad de tiempo, con respecto a una transformación que se irá describiendo.

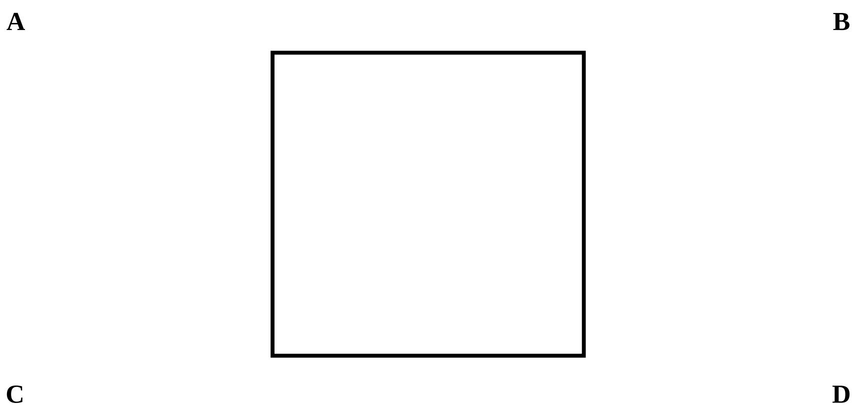

Figura 1.

Ahora, contraigamos la dimensión vertical uniformemente, hacia el centro del cuadrado y, al mismo tiempo, expandamos uniformemente, la horizontal. Usando línea punteada para esbozar el dominio obtenido por este proceso y superponiéndolo sobre el cuadrado original, se obtiene la figura 2.

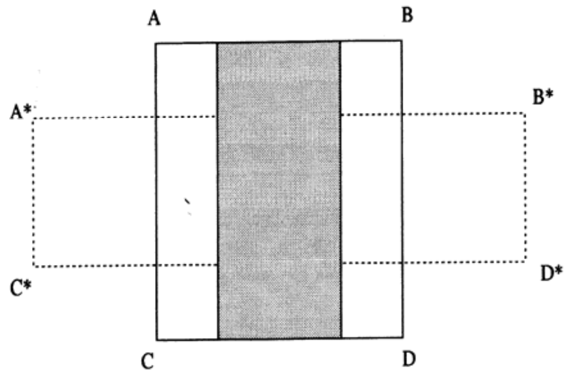

Figura 2.

Aquí los asteriscos, como súper-índices, se usan para denotar movimiento; así que el vértice A se mueve hasta A*. Existe un punto, denotado por O, que no varía. También se ha sombreado al conjunto de puntos que no salen del cuadrado original en este proceso.

El segundo de nuestros tres pasos para la comprensión es el ejemplo lineal perturbado.

Ahora el cuadrado pasa a una versión torcida del rectángulo largo de la figura 2. La figura 3 describe el movimiento de nuestro cuadrado, obtenido mediante una ligera modificación de la figura 2.

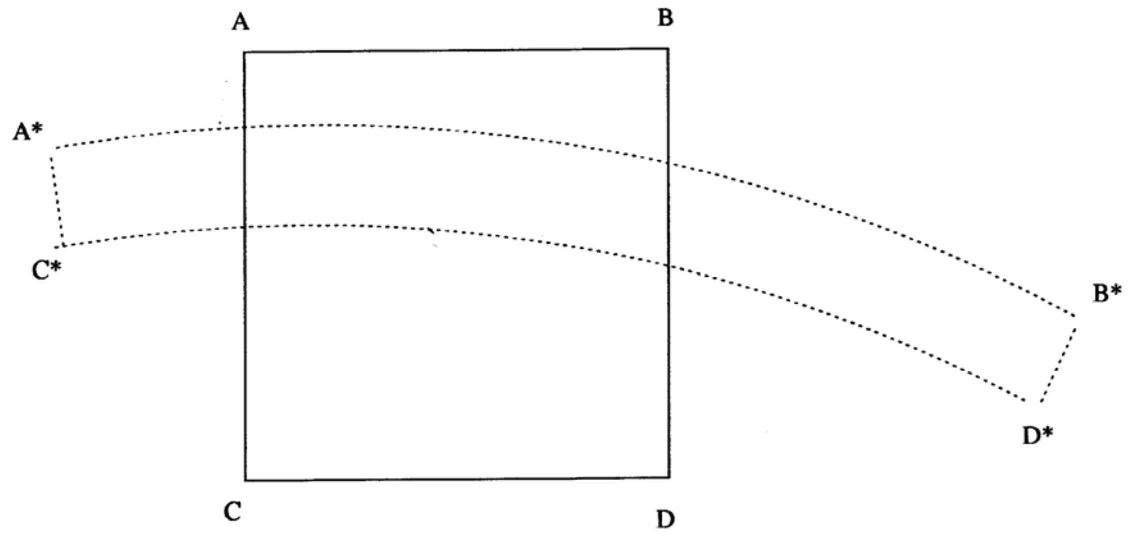

Figura 3.

La herradura es la versión completamente no lineal de lo que sucede con los puntos del cuadrado, mediante una extensión del proceso expresado en las figuras 2 y 3. Esta es la situación cuando el movimiento se expresa mediante una salida cualitativa desde el modelo lineal. Ver figura 4.

La herradura es el dominio bordeado por la línea de puntos. En vez de un estado de la naturaleza evolucionando de acuerdo con una expresión analítica, la evolución se da geométricamente. Toda la ventaja del punto de vista geométrico está comenzando a aparecer.

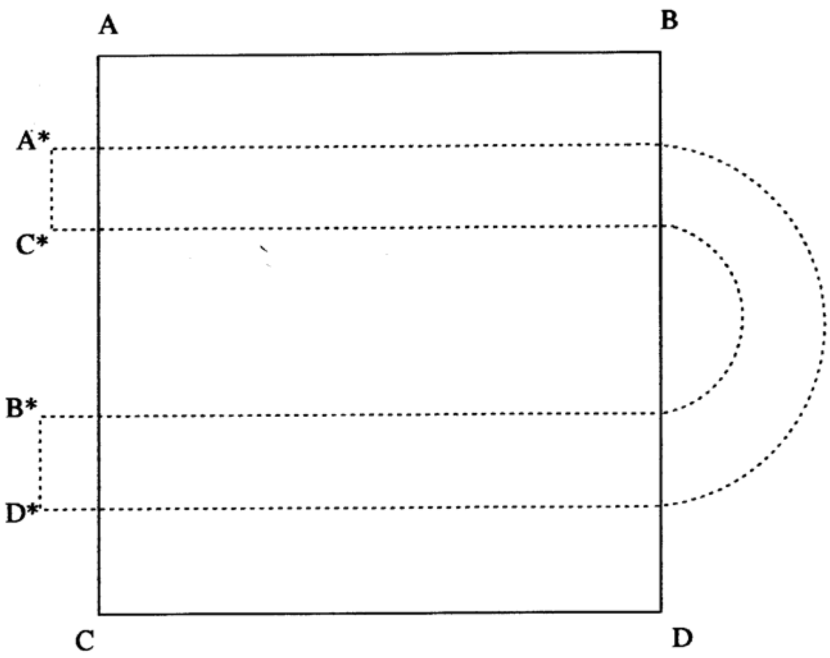

Figura 4.

La forma más tradicional de tratar con la dinámica era con el uso de expresiones analíticas; por ejemplo: expresiones algebraicas. Pero, una descripción dada mediante fórmulas podría resultar ser muy confusa. Muy improbablemente conduciría a una mayor perspicacia o a un análisis perceptivo. La experiencia de Smale como topologista, entrenado a torcer objetos, como cuadrados, lo ayudó a poder ver la herradura.

La dinámica de la herradura se describe mediante el movimiento de un punto en el cuadrado a un punto en la herradura de acuerdo con la figura 4. Así, el punto A se mueve hasta el punto A* en una unidad de tiempo.

¿Caos?

El movimiento de un punto general x se describe mediante una secuencia de puntos x_0 $x_1 \cdots$ Aquí $x_0 = x$ es el estado presente, x_1 es ese estado una unidad de tiempo después, x_2 es ese estado dos unidades de tiempo después, etc.

Ahora, imaginemos que nuestro campo visual se ajusta exactamente, al cuadrado mismo. Cuando un punto se mueva fuera del cuadrado desecharemos ese movimiento.

La siguiente figura 5 muestra sombreados, los puntos que no salen del cuadrado en una unidad de tiempo.

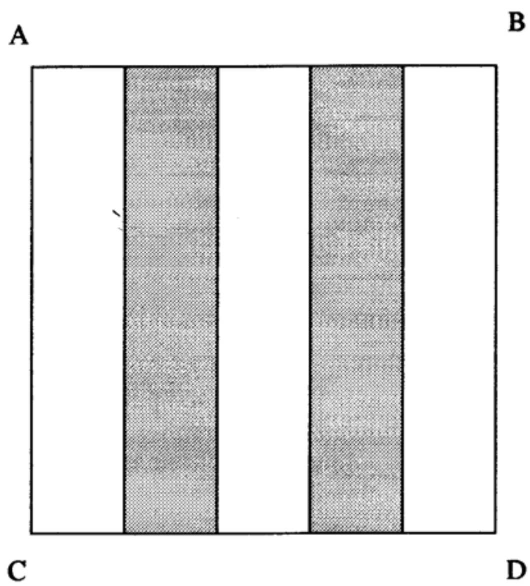

Figura 5.

Llamemos movimiento visible a todo movimiento que no sale del cuadrado. Nuestros resultados en la siguiente sección se refieren a los movimientos visibles.

Resumiendo: un movimiento completamente no lineal encuentra su realización en la herradura.

La Herradura y el Caos: Lanzamiento de Monedas

Las leyes del azar, con mucha razón, tradicionalmente se han expresado en términos del lanzamiento de una moneda. Que el resultado del lanzamiento de una moneda sea cara o sello es el paradigma de la pura casualidad. Por otra parte, es un proceso determinístico que gobierna totalmente al movimiento de la moneda y, por tanto, el resultado, cara o sello, depende sólo de muy sutiles factores de la iniciación del lanzamiento.

Un experimento de lanzamiento de moneda se puede representar mediante una secuencia; p. ej. *CSSCCSSSSC…*, donde *C* representa al resultado "cara" y *S* representa al resultado "sello".[2] Así, un experimento general de lanzamiento de moneda es una secuencia $s_0\ s_1\ s_2\ \ldots$, donde cada s_i es *C* ó *S*.

Ahora mostraremos el resultado del análisis de la herradura, hecho por Smale.

Consideremos todos los movimientos de la construcción de la herradura que permanecen en el cuadrado; esto es, que no salen de nuestro campo visual ¡Estos movimientos corresponden, precisamente, al conjunto de todos los experimentos de lanzamiento de moneda! Este descubrimiento prueba la ocurrencia de la impredecibilidad en movimientos completamente no lineales y provee un mecanismo de cómo el determinismo produce incertidumbre.

La demostración se basa en la siguiente construcción.

A cada movimiento visible se asocia un experimento de lanzamiento de moneda. Si $x_0\ x_1\ x_2 \cdots$ es un movimiento visible de la dinámica de la herradura, en el tiempo *i* asociamos *C* ó cara si x_i queda en la mitad superior del cuadrado y *S* ó sello si queda en la mitad inferior del cuadrado.

Es más, y esta es la parte ardua del asunto, cada posible secuencia de lanzamientos, está representada por un movimiento en la herradura. Por tanto, la

---

[2] Para tener un cuadro completo en esta sección, es necesario revertir el tiempo y considerar secuencias de caras y sellos que también retroceden en el tiempo.

dinámica es tan impredecible como el resultado de los lanzamientos. Simbólicamente, podemos representar esta correspondencia como

$$x_0\, x_1\, x_2 \cdots \quad \leftrightarrow \quad s_0\, s_1\, s_2\, \ldots$$

Aquí $x_0\, x_1\, x_2 \cdots$ es un movimiento que permanece dentro del cuadrado y $s_0\, s_1\, s_2$ … es una secuencia de caras y sellos. A la izquierda hay un movimiento determinísticamente generado y a la derecha un experimento de lanzamiento de moneda.

El análisis muestra que la anterior asociación es una completamente natural, identidad entre el conjunto de los movimientos que permanecen dentro del cuadrado y el conjunto de todos experimentos de lanzamiento de moneda.[3]

El análisis es robusto en el sentido de que no cambia por la presencia de interferencias en el ambiente.

El Oculto Origen del Caos

Puesto que la TC representa una revolución matemáticamente fundamentada, no es sorprendente ver que un matemático primero vio evidencia del Caos en la dinámica.

Jules Henri Poincaré fue (junto con David Hilbert) uno de los dos más sobresalientes matemáticos de finales del siglo XIX y principios del XX. Poincaré fue uno de los originadores de la Topología, que había escrito un artículo que establecía que una variedad con las mismas características algebraicas que la esfera *n*-dimensional era, efectivamente, una esfera *n*-dimensional. Cuando comprobó que había un error en su demostración, al restringirse a 3 dimensiones, reformuló

[3] Los matemáticos dicen que hay un isomorfismo que preserva la dinámica , o conjugación, entre los movimientos en la herradura que permanecen en el cuadrado y los experimentos de lanzamiento de moneda.

su afirmación como un problema, conocido ahora como la Conjetura de Poincaré. Este es el mayor problema abierto, en Topología y uno de los tres o cuatro grandes problemas todavía no resueltos en matemáticas. Sin embargo, aquí lo que nos importa es la contribución de este científico a la TC.

La demostración de la resolubilidad de las ecuaciones de la Mecánica Celeste o ecuaciones que describen los movimientos de los planetas era un célebre problema en aquellos momentos. Poincaré, en sus extensos estudios en Mecánica Celeste, estaba traumatizado por un fenómeno que él había descubierto, el cual probaba la imposibilidad de resolver tales ecuaciones. Él acuñó el concepto de "punto homoclínico".

Un punto homoclínico es un movimiento que tiende a un equilibrio según se incrementa el tiempo y también tiende a ese equilibrio según el tiempo retrocede hacia el pasado. La definición parece inocua, pero tiene consecuencias sorprendentes. Poincaré escribió acerca de su descubrimiento:

> "Uno se aturdirá por la complejidad de esta figura, la cual ni siquiera intentaré dibujar. Nada puede dar más claramente, una idea de la complejidad del problema de los tres cuerpos y, en general, de todos los problemas de la dinámica…"

Además de demostrar la imposibilidad de resolver las ecuaciones del movimiento planetario, el punto homoclínico ha resultado ser la marca de fábrica del caos.

G. D. Birkhoff, el más famoso matemático estadounidense, antes de la segunda guerra mundial, estuvo fuertemente influenciado por el trabajo de Poincaré en dinámica. Él desarrolló estas ideas y especialmente, las propiedades de los puntos homoclínicos en sus escritos de las décadas correspondientes a los años 1920 y 1930.

Smale se familiarizó con los puntos homoclínicos y el trabajo de Poincaré, examinando el trabajo de Birkhoff, lo cual le permitió, poco después de descubrir la herradura, encontrar una importante relación entre las herraduras y los puntos homoclínicos. La existencia de alguno de los dos implica la existencia del otro. Así, en particular, en presencia de un punto homoclínico, la marca de fábrica del caos, uno puede producir una herradura. Luego, el sindrome del lanzamiento de la moneda fundamenta al fenómeno homoclínico y ayuda a comprenderlo.

La Tercera Fuerza

Smale tuvo la fortuna de estar sometido a la confluencia de tres diferentes tradiciones históricas en materia de dinámica (llamada ecuaciones diferenciales ordinarias para ese tiempo). Estas tres culturas, aunque trataban con la misma materia, estaban aisladas una de otra y este aislamiento inhibió su desarrollo. Ya hemos discutido dos de estas fuerzas, Cartwright-Littlewood-Levinson y Poincaré-Birkhoff.

La tercera tuvo sus raíces en Rusia con la escuela de ecuaciones diferenciales de A. Andronov en Gorka en los años 1930. Smale no pudo conocer a Andronov. En 1961, conoció a Andronova-Leontovich viuda de Andronov, quien también trabajaba en ecuaciones diferenciales.

Andronov habia trabajado conjuntamente con el topologista ciego, Pontryagin, para describir una perspectiva geométrica de las ecuaciones diferenciales que ellos llamaban "aspereza", subsecuentemente la llamaron estabilidad estructural. El caos, en contraste con lo establecido en las dos previamente mencionadas tradiciones, estaba ausente de este enfoque, en virtud de la restringida clase de dinámica estudiada. Veinte años después, el gran topologista estadounidense Solomon Lefschetz se entusiasmó con el trabajo de Andronov-Pontryagin. Fue a través de la influencia de Lefschetz, en particular, via un artículo de su estudiante, De Baggis, que Mauricio Peixoto en Brasil, aprendió estabilidad estructural.

Peixoto fue a Princeton con Lefschetz en 1957, donde concertó una invitación de Smale a Brasil. Smale confiesa que las ideas de Pontryagin y Lefschetz, lo prepararon para escuchar a Peixoto. En 1960 Smale viajó a Brasil, donde compartiendo con Elon Lages Lima y Mauricio Peixoto, descubrió la herradura.

Para más información sobre los temas tratados se puede consultar, por ejemplo:

From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest. Hirsch, M. W. et al. editors. Springer-Verlag, N. Y. (1993)

Smale, S. *Differentiable Dynamical Systems*. Bull. of the Amer. Math. Soc., vol. 73 (1967), pp. 747-817

http://mathworld.wolfram.com

http://en.wikipedia.org

http://arxiv.org

Google: Smale ,horseshoe