

**SOLUCIONARIO MATEMÁTICAS II ECONOMÍA
CONVOCATORIA JUNIO 2002**

Cuestiones

1. a) La solución consiste en aplicar adecuadamente al Regla de la Cadena:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

En este caso tendremos:

$$(f \circ h)'(0) = f'(h(0))h'(0) = f'(1)h'(0)$$

dado que $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$, resultará que

$$f'(1) = 2 \operatorname{sen} 1 - \cos 1,$$

y puesto que $h'(0) = \operatorname{sen}^2 1$, resultará que sustituyendo obtendremos

$$(f \circ h)'(0) = f'(1)h'(0) = (2 \operatorname{sen} 1 - \cos 1) \operatorname{sen}^2 1$$

- b) Dado que $h(x^2) = \alpha(x)$, resultará que $\alpha'(x) = 2x \cdot h'(x^2)$, entonces para $x = a^2$, se obtendrá el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \alpha'(a^2) &= 2a^2 \cdot h'(a^4) = \\ &2a^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(a^4 + \pi/2)) \end{aligned}$$

2. Diferenciando ambas ecuaciones obtenemos

$$dx + dy + dz + du = 0 \quad xdx + ydy + zdz + udu = 0$$

de donde despejando de la primera expresión y sustituyendo en la segunda obtenemos:

$$dz = \frac{x-u}{u-z} dx + \frac{y-u}{u-z} dy$$

$$du = \frac{x-z}{z-u} dx + \frac{y-z}{z-u} dy$$

y por tanto, es inmediato comprobar que la derivadas primeras son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-u}{u-z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-u}{u-z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-z}{z-u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y-z}{z-u}$$

Problemas

1. **a.** Se analizan los puntos para los que se anula el denominador del exponente dentro del campo de definición de la función

$$\frac{1}{\cos 2x} = 0$$

por tanto,

$$x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi] \quad x = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$$

con lo que el dominio de la función es

$$[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi]$$

- b.** Estudiamos los valores conflictivo, esto es, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$. En ambos casos resulta que el límite a estudiar es el siguiente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (2\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{\cos 2x}} = 1^\infty$$

que se resuelve calculando el límite siguiente

$$e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos 2x} (2\operatorname{sen}^2 x - 1)}$$

en ambos casos, igualmente, sucede que es preciso resolver

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos 2x} = \frac{0}{0}$$

por lo que aplicando L'Hopital resulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4\operatorname{sen} x \cos x}{-2\operatorname{sen} 2x}$$

que para los dos valores a estudiar, esto es para $x_0 = \frac{\pi}{4}$ se obtiene -1 , dado que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{-2\operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4}} = -1$$

por lo que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{-1}$$

el mismo resultado se obtendría para $\frac{3\pi}{4}$.

2. Formamos el lagrangiano

$$L(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$$

derivando parcialmente respecto de x, y, λ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 4y + \frac{2\lambda}{9}x &= 0 \\ 4x + \frac{2\lambda}{4}y &= 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

de la primera ecuación obtenemos que $\lambda = -\frac{18y}{x}$, que sustituyendo en la segunda resulta, $4x^2 - 9y^2 = 0$ que despejando $y = \pm\frac{2}{3}x$. Por tanto, sustituyendo en la tercera igualdad, resulta

$$2\frac{x^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

con lo que los punto críticos serán:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \lambda_1 = -12 & P_2 &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), \lambda_2 = 12 \\ P_3 &= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \lambda_3 = 12 & P_4 &= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), \lambda_4 = -12 \end{aligned}$$

Estudiando el hessiano orlado para lo cual calculamos las segundas derivadas parciales:

$$L_{xx} = \frac{2}{9}\lambda; \quad L_{xy} = 4 = L_{yx}; \quad L_{yy} = \frac{1}{2}\lambda; \quad L_{\lambda y} = \frac{1}{2}y; \quad L_{\lambda x} = \frac{2}{9}x$$

y resulta que

$$H_2(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{9}x & \frac{1}{2}y \\ \frac{2}{9}x & \frac{2}{9}\lambda & 4 \\ \frac{1}{2}y & 4 & \frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix} = -\frac{2}{81}x^2\lambda + \frac{8}{9}xy - \frac{1}{18}y^2\lambda$$

$$H_2(P_1) = \frac{16}{3} > 0 \rightarrow P_1 \text{ máximo}$$

$$H_2(P_2) = -\frac{16}{3} < 0 \rightarrow P_2 \text{ mínimo}$$

$$H_2(P_3) = -\frac{16}{3} < 0 \rightarrow P_3 \text{ mínimo}$$

$$H_2(P_4) = \frac{16}{3} > 0 \rightarrow P_4 \text{ máximo}$$