MATEMÁTICAS II
COD. CARR. 43
COD. ASIG. 107
PRUEBA PERSONAL, **SEPTIEMBRE 02**, **duración 2 horas**.**Solucionario**.

Cuestiones:

1. a) *Probar que el polinomio* $p\ x \quad x^3 \quad 3x \quad 5$ *tien una única raíz real*. *Utilizar el teorema de Rolle*. *No es necesario calcuar la raíz*.

Como se trata de un polinomio de grado tres, debe tener tres raices, de las cuales, una es necesariamente real, ya que las raices complejas siempre aparecen como pares de raices complejas conjugadas. Supongamos que el $p\ x$ tiene dos raices reales a y b lo cual implica que $p\ a \quad p\ b \quad 0$. Si aplicamos el teorema de Rolle, como $p\ x$ es una función continua, y puesto que $p\ a \quad p\ b$ entonces debe existir un punto intermedio, $c \quad a, b$ en el cual $p\ \ x \quad 0$. Si calculamos $p\ \ x \quad 3x^2 \quad 3$ vemos que no existe ningún punto en el cual se anule $p\ \ x$ ya que $3x^2 \quad 3 \quad 0$ para todo $x \quad R$. Luego la hipótesis de partida según la cual suponiamos que existian dos raices reales es falsa. Luego $p\ x$ tiene una única raíz real.

b) *Hallar mediante la regla de la cadena la derivada* $\frac{dw}{dt}$ *siendo* $w \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2$, *donde* $x \quad e^t \cos t,\ y \quad e^t sent,\ z \quad e^t$.

$$\frac{dw}{dt} \quad \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt} \quad \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}$$

Donde $\frac{dw}{dx} \quad 2x, \frac{dw}{dy} \quad 2y, \frac{dw}{dz} \quad 2z$

$$\frac{dx}{dt} \quad e^t \ \cos t \quad sent\ ,\ \frac{dy}{dt} \quad e^t\ sent \quad \cos t\ ,\ \frac{dz}{dt} \quad e^t$$

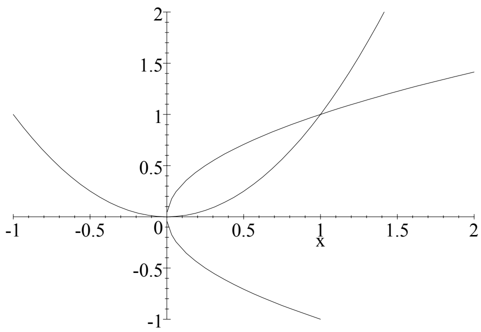
sustituyendo estas expresiones en $\frac{dw}{dt}$ nos queda:

$$\frac{dw}{dt} \quad 2xe^t\ \cos t \quad sent \quad 2y\ sent \quad \cos t \quad 2ze^t \quad 2e^{2t}\ \cos^2 t \quad sent \cos t \quad sen^2 t \quad sent \cos$$

2. Dadas las funciones $y \quad x^2, x \quad y^2$ se pide :

a) Dibujar la región limitada por dichas curvas

$y \quad x^2, y \quad \sqrt{x}, y \quad \sqrt{x}$

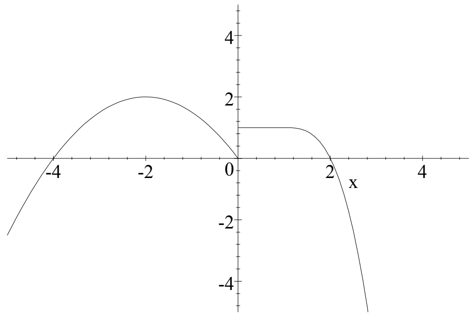


b) Calcular el área de la región dibujada en el apartado anaterior.

hemos de calcular la integral de la función que va por arriba $\sqrt{x}$ menos la la función que va por debajo x^2 entre los puntos de corte de ambas funciones, los cuales se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$, cuyas raices son $x = 0, x = 1$. Luego el área pedida viene dada por la siguiente integral $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{1}{3}$.

Problemas:

1. Dada la gráfica de la función f', de la función $f(x)$ se pide:



a) Calcular las extremos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

Los extremos locales de la función *f* son los puntos en los que se anula la derivada.

$f'(x) = 0$ se cumple en $x = -4, x = 0, x = 2$. (posibles extremos)

f crece si $f' > 0$, y esto ocurre en los intervalos $(-4, 2)$

f decreciente si $f' < 0$, y esto ocurre en los intervalos $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$

Como en $x = -4$ la función *f* pasa de ser decreciente a ser creciente, en

$x \quad 4$ la función alcanza un mínimo.

Como en $x \quad 2$ la función f pasa de ser creciente a ser decreciente, en $x \quad 2$ la función alcanza un máximo.

Como en $x \quad 0$ no hay cambio en el crecimiento-decrecimiento de la función f no podemos afirmar que sea máximo ni mínimo.

b) Calcular los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función f.

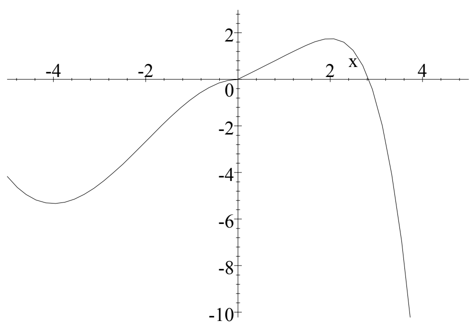
Para obtener los puntos de inflexión hemos de ver los puntos en los que $f \ \ x \quad 0$ y esto se satisface en los puntos en los que f

tiene un máximo o un mínimo. Luego en $x \quad 2$ la función f tiene un punto de inflexión que se corresponde con el máximo de la

función derivada f .

La función f es cóncava si $f \quad 0 \quad f$ es decreciente.
$x \quad 2,0 \quad 1,$
La función f es convexa si $f \quad 0 \quad f$ es creciente. $x \quad , \ 2$

c) supuesto $f\,0 \quad 0,$ dibujar una función f que verifique lo anterior.



2. Hallar los máximos y mínimos de $u \quad xz \quad x^2 \quad y \quad yz \quad y^2 \quad 3z^2$.

Para obtener los puntos críticos calculamos las derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$\frac{u}{x} \quad z \quad 2x \quad 0$$
$$\frac{u}{y} \quad 1 \quad z \quad 2y \quad 0$$
$$\frac{u}{z} \quad x \quad y \quad 6z \quad 0$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas nos queda el punto $\left(\frac{1}{20}, \frac{11}{20}, \ \frac{1}{10}\right)$

Calculamos las segundas derivadas para obtener el hessiano y determinar si es máximo o mínimo.

$$\frac{{}^{2}u}{x^{2}} \quad 2, \quad \frac{{}^{2}u}{y^{2}} \quad 2, \quad \frac{{}^{2}u}{z^{2}} \quad 6, \quad \frac{{}^{2}u}{x\ y} \quad 0, \quad \frac{{}^{2}u}{x\ z} \quad 1, \quad \frac{{}^{2}u}{y\ z} \quad 1$$

Luego el hessiano viene dado por :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad 20 \quad 0, \text{y} \ \frac{{}^{2}u}{x^{2}} \quad 2 \quad 0$$

por tanto la función alcanza un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{20}, \frac{11}{20}, \ \frac{1}{10}\right)$